JORDANŮV KANONICKÝ TVAR

–DEF 9.79: BUĎ T TĚLESO, $k \geq 1$ A $\lambda \in T$. PAK **JORDANOVOU BUŇKOU** ŘÁDU k PŘÍSLUŠNOU PRVKU λ ROZUMÍME MATICI

$$J_{\lambda,k} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & 0 \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda \end{pmatrix}}_{k} \Bigg\} k$$

–PŘ: $k = 1, 2, 3$:

$$J_{\lambda,1} = (\lambda), \quad J_{\lambda,2} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad J_{\lambda,3} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

–POZN:

- $p_{J_{\mu,k}} = \det(J_{\mu,k} - \lambda \cdot I_k) = \begin{vmatrix} \mu-\lambda & 1 & & \\ & \mu-\lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \mu-\lambda \end{vmatrix} = (\mu-\lambda)^k$ $\Rightarrow$ JEDNÉ VL. ČÍSLO μ ALG. NÁSOBNOSTI k

  $\mu \in T$

- $M_\mu = \operatorname{Ker}(J_{\mu,k} - \mu \cdot I_k) = \operatorname{Ker} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}}_{J_{0,k},\ \text{MÁ HODNOST } k-1} = LO\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = LO\{e_1\}$ $\Rightarrow$ μ MÁ GEOMETRICKOU NÁSOBNOST 1

- **DEF 9.81:** ŘEKNEME, ŽE ČTVERCOVÁ MATICE J NAD TĚLESEM T JE V JORDANOVĚ (KANONICKÉM) TVARU, POKUD JE BLOKOVĚ DIAGONÁLNÍ A ČTVERCOVÉ BLOKY NA DIAGONÁLE JSOU JORDANOVY BUŇKY. TJ.

$$J = \operatorname{diag}\left(J_{\lambda_1,k_1}, J_{\lambda_2,k_2}, \dots, J_{\lambda_s,k_s}\right) = \underbrace{\begin{pmatrix} J_{\lambda_1,k_1} & & & \\ & J_{\lambda_2,k_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{\lambda_s,k_s} \end{pmatrix}}_{k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_s} \qquad \sum_{i=1}^{s} k_i =: k$$

- **PŘ 9.83:** $T = \mathbb{R}$, $J := \operatorname{diag}(J_{0,2}, J_{0,1}, J_{2,3})$, TJ. J JE ŘÁDU $2+1+3=6$,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- **PŘ 9.82:** KAŽDÁ DIAGONÁLNÍ MATICE JE V JORDANOVĚ TVARU

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1} & & & 0 \\ & \boxed{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{\lambda_k} \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(J_{\lambda_1,1}, \dots, J_{\lambda_k,1})$$

- **DEF 9.87:** (ZOBECNĚNÍ DIAGONALIZOVATELNOSTI)

  BUĎ $f: V \to V$ LINEÁRNÍ OPERÁTOR NA KON. GEN. V.P. NAD T.

  ŘEKNEME, ŽE EXISTUJE JORDANŮV KANONICKÝ TVAR (OPERÁTORU f), POKUD $\exists$ BÁZE B PROSTORU V TAKOVÁ, ŽE $[f]_B^B$ JE V JORDANOVĚ TVARU.

- PODOBNĚ JE-LI A ČTVERCOVÁ MATICE NAD T, PAK A MÁ JORDANŮV KANONICKÝ TVAR, POKUD PRO f_A EXISTUJE JORDANŮV KANONICKÝ TVAR

- POZOROVÁNÍ: A MÁ JORDANŮV KAN. TVAR $\Leftrightarrow$ $\exists$ MATICE V JORDANOVĚ TVARU, KTERÁ JE PODOBNÁ MATICI A

  ($\exists J$ V JORD. TVARU, $\exists R$ REGULÁRNÍ: $J = R \cdot A \cdot R^{-1}$)

- UKÁŽEME NÁSLEDUJÍCÍ KLÍČOVÝ VÝSLEDEK: JE-LI $T = \mathbb{C}$, PAK JORDANŮV TVAR VŽDY EXISTUJE!

– MOCNĚNÍ MATICE V JORDANOVĚ TVARU (A DISKRÉTNÍ LIN. DYN. SYSTÉMY)

- BUĎ T TĚLESO A $J = \mathrm{diag}(J_{\lambda_1,k_1}, \dots, J_{\lambda_s,k_s}) = \begin{pmatrix} \boxed{} & & 0 \\ & \boxed{} & \\ 0 & & \ddots\ \boxed{} \end{pmatrix}$ MATICE V JORDANOVĚ TVARU

- JAK VYPADÁ J^m, $m \geq 1$?

- POZOROVÁNÍ: $J^m = \mathrm{diag}(J^m_{\lambda_1,k_1}, \dots, J^m_{\lambda_s,k_s}) = \begin{pmatrix} \boxed{J^m_{\lambda_1,k_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{J^m_{\lambda_s,k_s}} \end{pmatrix}$

- CO MUSÍME POCHOPIT, JE, JAK SE MOCNÍ JORDANOVY BUŇKY.

- 1. KROK: POCHOPÍME SITUACI V PŘÍPADĚ $\lambda = 0$, TJ. JAK VYPADÁ $J^m_{0,k}$

$$J_{0,k} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & 1 \\ 0 & - & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$f_{J_{0,k}}(e_1)$ $\quad f_{J_{0,k}}(e_2)$ $\quad f_{J_{0,k}}(e_k)$

$$f_{J_{0,k}}: \begin{array}{rcl} e_1 & \longmapsto & 0 \\ e_2 & \longmapsto & e_1 \\ \vdots & & \\ e_{k-1} & \longmapsto & e_{k-2} \\ e_k & \longmapsto & e_{k-1} \end{array}$$

$$e_k \xmapsto{f_{J_{0,k}}} e_{k-1} \xmapsto{f_{J_{0,k}}} \cdots \xmapsto{f_{J_{0,k}}} e_2 \xmapsto{f_{J_{0,k}}} e_1 \longmapsto 0$$

$$e_k \overset{f_{J_{0,k}}}{\longmapsto} e_{k-1} \xrightarrow{f_{J_{0,k}}} \cdots \overset{f_{J_{0,k}}}{\longmapsto} e_2 \overset{f_{J_{0,k}}}{\longmapsto} e_1 \longmapsto 0$$

– PAK TEDY $f_{J_{0,k}}^m = \left(f_{J_{0,k}}\right)^m$:

$$\left.\begin{aligned} e_k &\longmapsto e_{k-m} \\ e_{k-1} &\longmapsto e_{k-1-m} \\ &\vdots \\ e_{m+1} &\longmapsto e_1 \\ e_m &\longmapsto 0 \\ &\vdots \\ e_1 &\longmapsto 0 \end{aligned}\right] \qquad e_i \longmapsto \begin{cases} e_{i-m} & \dots\ i > m \\ 0 & \dots\ i \le m \end{cases}$$

– T9.84 : PRO $m < k$: $J_{0,k}^m = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{0}_{m} & \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} \end{array}\right) = \left(\underbrace{0 \,\middle|\, 0 \,\middle|\, \dots \,\middle|\, 0}_{m} \,\middle|\, e_1 \,\middle|\, \dots \,\middle|\, e_{k-m}\right)$

PRO $m \ge k$: $J_{0,k}^m = 0$

– MOCNINY OBECNÉ JORDANOVY BUŇKY!

$$J_{\lambda,k} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} = \left(\lambda \cdot I_k + J_{0,k}\right)$$

– **POZOR:** PLATÍ, ŽE PRO ČTVERCOVÉ MATICE A,B STEJNÉHO ŘÁDU NAD STEJNÝM TĚLESEM, PRO KTERÉ PLATÍ $AB = BA$, PLATÍ $(A+B)^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} A^i B^{m-i} \; \forall m \geq 1$.
(DŮKAZ JE INDUKCÍ PODLE m).

– V NAŠEM PŘÍPADĚ: $(\lambda I_k)\, J_{0,k} = \lambda \cdot J_{0,k} = \lambda \cdot J_{0,k} \cdot I_k = J_{0,k} \cdot (\lambda I_k)$ ✓

– **T 9.86:** BUĎ T TĚLESO, $\lambda \in T$, $k \geq 1$, $m \geq 1$. PAK

$$J_{\lambda,k}^m = \lambda^m I_k + \binom{m}{1}\lambda^{m-1} J_{0,k} + \binom{m}{2}\lambda^{m-2} J_{0,k}^2 + \dots + \binom{m}{k-1}\lambda^{m-k+1} J_{0,k}^{k-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^m & m\lambda^{m-1} & \binom{m}{2}\lambda^{m-2} & \cdots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \binom{m}{2}\lambda^{m-2} \\ & & \ddots & \ddots & m\lambda^{m-1} \\ 0 & & & & \lambda^m \end{pmatrix}$$

- JAK HLEDAT BÁZI LIN. OPERÁTORU $f: V \to V$ TAKOVOU, ABY $(f)_B^B$ BYLA V JORDANOVĚ TVARU?

- 1. KROK: CO BY MUSELO PLATIT, ABY $(f)_B^B = J_{\lambda, k}$?

POKUD $B = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ JE BÁZE V TAKOVÁ, ŽE

$$[f]_B^B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix},$$

$(f(v_1))_B$ $\quad (f(v_2))_B$

PAK $f: \; v_1 \longmapsto \lambda \cdot v_1$ ← VLASTNÍ VEKTOR PŘÍSLUŠNÝ λ

$v_2 \longmapsto \lambda v_2 + v_1$

$\vdots$

$v_k \longmapsto \lambda v_k + v_{k-1}$

TZV. ZOBECNĚNÉ VLASTNÍ VEKTORY

- TOTO CHOVÁNÍ f ELEGANTNĚJI ZAPÍŠEME POMOCÍ OPERÁTORU $f - \lambda \mathrm{id}_V$

$\left([f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V]_B^B = [f]_B^B - \lambda I_k = J_{0,k} \right)$

$$v_k \xmapsto{f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V} v_{k-1} \xmapsto{f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V} v_{k-2} \longmapsto \cdots \xmapsto{f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V} v_2 \xmapsto{f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V} v_1 \xmapsto{f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V} 0$$

- **DEF 9.88**: BUĎ $f: V \to V$ LINEÁRNÍ OPERÁTOR, BUĎ λ VLASTNÍ ČÍSLO f A BUĎ $(v_1, \dots, v_k)$ POSLOUPNOST VEKTORŮ.

ŘEKNEME, ŽE $(v_1, \dots, v_k)$ JE **JORDANŮV ŘETÍZEK**

- DÉLKY k
- PŘÍSLUŠNÝ VLASTNÍMU ČÍSLU λ
- S POČÁTKEM v_1,

POKUD

$$v_k \xmapsto{f-\lambda \cdot id_V} v_{k-1} \xmapsto{f-\lambda \cdot id_V} v_{k-2} \mapsto \dots \xmapsto{f-\lambda \cdot id_V} v_2 \xmapsto{f-\lambda \cdot id_V} v_1 \xmapsto{f-\lambda \cdot id_V} 0.$$

VEKTORY $v_1, \dots, v_k$ SE PAK NAZÝVAJÍ **ZOBECNĚNÉ VLASTNÍ VEKTORY** PŘÍSLUŠNÉ λ.

- **T 9.89**: BUĎ $f: V \to V$ LIN. OPERÁTOR NA KON. GEN. V.P. V S BÁZÍ $B = (v_1, \dots, v_k)$.

PAK $[f]_B^B = J_{\lambda, k} \iff B$ JE JORDANŮV ŘETÍZEK DÉLKY k PŘÍSLUŠNÝ λ S POČÁTKEM VE v_1.

- **T9.90:** BUĎ $f: V \to V$ LINEÁRNÍ OPERÁTOR NA KON. GEN. V.P. A B BÁZE V, PAK

$$[f]_B^B = \mathrm{diag}(J_{\lambda_1, k_1}, \dots, J_{\lambda_s, k_s}),$$

PRÁVĚ KDYŽ

$B = B_1 \cdots B_s$ JE SPOJENÍM JORDANOVÝCH ŘETÍZKŮ $B_1, \dots, B_s$, KDE B_i JE DÉLKY k_i, PŘÍSLUŠNÝ VL. ČÍSLU λ_i

---

- **TERMINOLOGIE:** JSOU-LI $B_1, \dots, B_s$ POSLOUPNOSTI, $B_i = (v_1^i, \dots, v_{k_i}^i)$, PAK JEJICH SPOJENÍM $B_1 \cdots B_s$ ROZUMÍME POSLOUPNOST

$$B_1 \cdots B_s = (v_1^1, \dots, v_{k_1}^1, v_1^2, \dots, v_{k_2}^2, \dots, v_1^s, \dots, v_{k_s}^s).$$

- **DŮSL 9.91:** $f: V \to V$ MÁ JORDANŮV KANONICKÝ TVAR, PRÁVĚ KDYŽ $\exists$ BÁZE B PROSTORU V, KTERÁ JE SPOJENÍM JORDANOVÝCH ŘETÍZKŮ.

– KDY DOSTANEME SPOJENÍM JORDANOVÝCH ŘETÍZKŮ LN POSLOUPNOST?

– V9.93: BUĎ T TĚLESO, $f: V \to V$ LINEÁRNÍ OPERÁTOR NA V.P. V NAD T, BUĎTE $B_1, \dots, B_s$ JORDANOVY ŘETÍZKY POPOŘADĚ DÉLEK $k_1, \dots, k_s$ PŘÍSLUŠNÉ VLASTNÍM ČÍSLŮM $\lambda_1, \dots, \lambda_s$.

PŘEDPOKLÁDEJME, ŽE $\forall \lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$ JE POSLOUPNOST POČÁTKŮ TĚCH B_i, KTERÉ JSOU PŘÍSLUŠNÉ λ, LN.

PAK UŽ JE SPOJENÍ $B_1 \dots B_s$ LN.