LINEÁRNÍ OPERÁTORY NA $\mathbb{R}^2$

- BUĎ $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, TJ. $f = f_A$ PRO NĚJAKOU MATICI $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$
- PAK $p_f(\lambda)$ JE TVARU $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (\det A)$
- MOHOU NASTAT TYTO MOŽNOSTI:

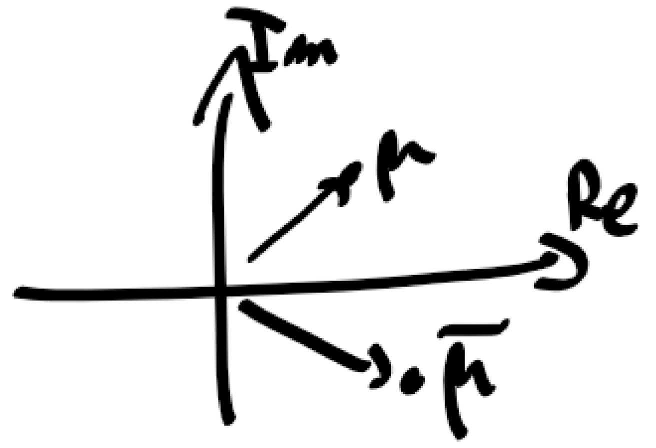
1. f MÁ DVĚ RŮZNÁ REÁLNÁ VLASTNÍ ČÍSLA λ_1, λ_2, OBĚ NUTNĚ ALG. I GEOM. NÁSOBNOSTI 1.
   $\Rightarrow$ f DIAGONALIZOVATELNÝ, $\exists$ BÁZE B PROSTORU $\mathbb{R}^2$ TAKOVÁ, ŽE $[f]_B^B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

2. f MÁ JEDNO REÁLNÉ VLASTNÍ ČÍSLO μ (PAK NUTNĚ $p_f = (\lambda - \mu)^2$)
   $\Rightarrow$ μ MÁ ALGEBRAICKOU NÁSOBNOST 2

   2a. GEOM. NÁSOBNOST μ JE 2 $\Rightarrow$ f DIAGONALIZOVATELNÝ, $\exists B$ ~~BÁZE~~ TAKOVÁ, ŽE $[f]_B = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$

   2b. GEOMETRICKÁ NÁSOBNOST μ JE 1 $\Rightarrow$ f NENÍ DIAGONALIZOVATELNÝ

3. f NEMÁ REÁLNÁ VLASTNÍ ČÍSLA, ALE p_λ MÁ 2 RŮZNÉ KOMPLEXNÍ KOŘENY $\mu, \bar{\mu}$
   $\Rightarrow$ A JE PODOBNÁ NA $\mathbb{C}$ MATICI $\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \bar{\mu} \end{pmatrix}$



- **PŘÍPAD 3:** $f = f_A$, A MÁ 2 RŮZNÁ KOMPLEXNÍ VLASTNÍ ČÍSLA $\mu, \overline{\mu}$

- **ZNAČENÍ:** $x \in \mathbb{C}^n$ VEKTOR $\rightsquigarrow$ $\overline{x} := \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{pmatrix}$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ MATICE $\rightsquigarrow$ $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$

$$A = (a_{ij})$$

- **POZOROVÁNÍ:** $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n \cdot p}$, PAK $\overline{A \cdot B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

$$\overline{A \cdot B} = \left(\overline{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}}\right), \qquad \overline{A} \cdot \overline{B} = \left(\sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}} \cdot \overline{b_{jk}}\right)$$

- **T9.13:** BUĎ $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ A $x \in \mathbb{C}^n$ VLASTNÍ VEKTOR PŘÍSLUŠNÝ VLASTNÍMU ČÍSLU $\mu \in \mathbb{C}$. PAK $\overline{\mu} \in \mathbb{C}$ JE TAKÉ VLASTNÍ ČÍSLO A, $\overline{x}$ JE PŘÍSLUŠNÝ VLASTNÍ VEKTOR.

- **Dk:**
  - $p_A(\lambda)$ MÁ REÁLNÉ KOEFICIENTY, ČILI JE-LI μ JEHO KOŘEN, PAK $\overline{\mu}$ TAKÉ
  - NAVÍC $A\overline{x} \underset{A = \overline{A}}{=} \overline{A}\,\overline{x} = \overline{Ax} = \overline{\mu x} = \overline{\mu}\,\overline{x}$

– PŘ (ČÁST 9.74) $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2$$

$$\rightsquigarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm i$$

$$\rightsquigarrow M_{1+i} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} = \operatorname{LO}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}\right\}$$

$$\overset{T9.73}{\Longrightarrow} M_{1-i} = \operatorname{LO}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\right\}$$

$$\rightsquigarrow B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\right) \qquad \rightsquigarrow \qquad f_A : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$$

$$[f_A]^B_B = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ KONKRÉTNĚ

$$A = [id]^B_{K_2} \, [f_A]^B_B \cdot [id]^{K_2}_B$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}^{-1}$$

- **PŘÍPAD 3**: $f = f_A$, A MÁ 2 RŮZNÁ KOMPLEXNÍ VLASTNÍ ČÍSLA $\mu, \bar{\mu}$
(POKRAČOVÁNÍ)

$\mu = r \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$
$r \in \mathbb{R}$ KLADNÉ
$\varphi \in [0, 2\pi)$

- UVAŽUJEME OPERÁTOR DANÝ MATICÍ A NA $\mathbb{C}^2$:

$$g : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$$
$$x \longmapsto A \cdot x$$

$\rightsquigarrow$ BUĎ $v \in \mathbb{C}^2$ VLASTNÍ VEKTOR PŘÍSLUŠNÝ μ, TJ. $\bar{v}$ JE VL. VEKTOR PŘÍSLUŠNÝ $\bar{\mu}$ A $[g]^{(v,\bar{v})}_{(v,\bar{v})} = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \bar{\mu} \end{pmatrix}$

- **POZOROVÁNÍ**: $B = \Big(\underbrace{v + \bar{v}}_{w_1}, \underbrace{i(v - \bar{v})}_{w_2} \Big)$ JE BÁZE $\mathbb{C}^2$, ALE I $\mathbb{R}^2$

$\Big(\big([w_1]_{(v,\bar{v})} \,\big|\, [w_2]_{(v,\bar{v})} \big) = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$ JE REGULÁRNÍ $\Big)$

(PROTOŽE (w_1, w_2) JE LN NAD $\mathbb{C}$, TÍM SPÍŠ NAD $\mathbb{R}$)

- MATICE JAK g, TAK f VZHLEDEM K B JE REÁLNÁ, A SICE

$$[f]^B_B = [g]^B_B = [id]^{(v,\bar{v})}_{B} \cdot [g]^{(v,\bar{v})}_{(v,\bar{v})} \cdot [id]^{B}_{(v,\bar{v})} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} r(\cos\varphi + i\sin\varphi) & 0 \\ 0 & r(\cos\varphi - i\sin\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} = \dots =$$

$$= r \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

- PŘÍPAD 2B: $f = f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ NEDIAGONALIZOVATELNÝ

(§ 9.4.1) $\mu \in \mathbb{R}$ VL. ČÍSLO ALG. NÁS. 2, GEOMETRICKÉ NÁSOBNOSTI 1

- SPECIÁLNÍ PŘÍPAD: $\mu = 0$, TJ $\ker f = M_0$ MÁ DIMENZI 1
  - $\Rightarrow$ $\operatorname{Im} f$ MÁ TAKÉ DIMENZI 1, ŘEKNĚME $\operatorname{Im} f = LO\{\overset{\neq 0}{v_1}\}$
  - BUĎ v_2 VZOR v_1, TJ. $v_2 \overset{f}{\longmapsto} v_1$
  - CO JE $f(v_1) \in \operatorname{Im} f = LO\{v_1\}$? NUTNĚ $f(v_1) = \lambda v_1$, TJ. v_1 JE VL. VEKTOR!
  - $\Rightarrow$ $\lambda = 0$, $v_1 \in \ker f$ $\rightsquigarrow$ $v_2 \overset{f}{\longmapsto} v_1 \overset{f}{\longmapsto} 0$
  - POZOROVÁNÍ: (v_1, v_2) JE LN, TEDY BÁZE $\mathbb{R}^2$
  - $\rightsquigarrow$ $[f]^B_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- OBECNÝ PŘÍPAD: POLOŽÍME $g = f - \mu \cdot id_{\mathbb{R}^2}$, TJ g JE DÁNO MATICÍ $A - \mu \cdot I_2$
  - $\Rightarrow$ g NENÍ DIAGONALIZ., MÁ VL. Č. 0 $\left(p_g(\lambda) = p_f(\lambda - \mu) \right)$
  - $\rightsquigarrow$ $\exists$ BÁZE $\underset{(v_1, v_2)}{B}$ PROSTORU $\mathbb{R}^2$ TAKOVÁ, ŽE $[g]^B_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $[f]^B_B = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$

$$v_2 \xmapsto{f = g + \mu \cdot id_{\mathbb{R}^2}} v_1 + \mu v_2, \quad v_1 \xmapsto{f = g + \mu \cdot id_{\mathbb{R}^2}} \mu v_1$$

- PŘÍPAD 2a, MOCNĚNÍ: $A = R \cdot \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \cdot R^{-1}$

$$\Rightarrow \quad \forall k \geq 0: \quad A^k = R \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}^k \cdot R^{-1}$$

- T 9.86, SPEC. PŘÍPAD:

$$\begin{pmatrix} \mu & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \mu^k & k \cdot \mu^{k-1} \\ 0 & \mu^k \end{pmatrix}$$

- Dk: INDUKCÍ PODLE $k \geq 1$

- CHOVÁNÍ SPOJITÝCH REÁLNÝCH DYNAMICKÝCH SYSTÉMŮ S DIAGONALIZ. OPERÁTOREM

- TJ. SNAŽÍME SE NAJÍT FUNKCE $x_1, \dots, x_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($\to \mathbb{C}$) TAKOVÉ, ŽE PRO $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

PLATÍ

$$x'(t) = A \cdot x(t), \quad x(0) = b, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad b \in \mathbb{R}^n$$

- PŘEDP.: A DIAGONALIZOVATELNÁ NAD $\mathbb{R}$ (NEBO $\mathbb{C}$)

- FAKT: (TG. 7) JSOU-LI $\lambda, s \in \mathbb{R}$ (NEBO $\mathbb{C}$), PAK $\exists!$ FUNKCE $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($\to \mathbb{C}$) SPLŇUJÍCÍ:

ⓐ $\forall t \in \mathbb{R} : f'(t) = \lambda \cdot f(t)$ A

ⓑ $f(0) = s$,

A SICE $f = s \cdot e^{\lambda t}$ $\left(s \cdot e^{(a+bi)t} = s \cdot e^{at} \cdot (\cos bt + i \sin bt),\ \lambda = a + bi \right)$

- PAK $\exists$ REGULÁRNÍ MATICE R TAKOVÁ, ŽE $R^{-1} A R = D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

- POLOŽÍME $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = \underbrace{R^{-1}}_{= (b_{ij})} \cdot x(t) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1} b_{ij} \cdot x_j(t) \\ \vdots \end{pmatrix} \Rightarrow y'(t) = R^{-1} \cdot x'(t)$

$$R^{-1} x'(t) = R^{-1} A\, x(t)$$

$$y'(t) = D \cdot y(t), \quad y(0) = R^{-1} \cdot b =: c$$

$$\forall i : y_i'(t) = \lambda_i \cdot y_i(t), \quad y_i(0) = c_i \quad \Rightarrow \quad y_i(t) = c_i \cdot e^{\lambda_i \cdot t}$$

- POZN: $p_A(\lambda)$ vs. $p_{A^T}(\lambda)$

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I_n) = \det(A - \lambda I_n)^T =$$

$$= \det(A^T - \lambda I_n) = p_{A^T}(\lambda)$$