# NÁSOBNOSTI VLASTNÍCH ČÍSEL – ALGEBRAICKÁ VS GEOMETRICKÁ

– PROČ? A ČTVERCOVÁ MATICE ŘÁDU $n$, KTERÁ MÁ $n$ PO 2 RŮZNÝCH VL. ČÍSEL, PAK JE DIAGONALIZOVATELNÁ (DŮSL 9.64).
CO KDYŽ A BUDE MÍT VL. ČÍSLA VYŠŠÍCH ALG. NÁSOBNOSTÍ?

– PŘIPOMENUTÍ – DEF 9.49: A ČTVERCOVÁ MATICE ŘÁDU $n$, $\lambda \in T$ VLASTNÍ ČÍSLO.
PAK ALGEBRAICKOU NÁSOBNOSTÍ $\lambda$ ROZUMÍME NÁSOBNOST $\lambda$ JAKOŽTO KOŘENU $p_A(\lambda)$.

– DEF 9.67: BUĎ A ČTVERCOVÁ MATICE ŘÁDU $n$ NAD $T$, $\lambda \in T$ VLASTNÍ ČÍSLO.
UVAŽUJME PODPROSTOR

$$M_\lambda = \{ v \in T^n : Av = \lambda v \} \underset{(T\,9.24)}{\leq} T^n$$

PAK GEOMETRICKOU NÁSOBNOSTÍ $\lambda$ ROZUMÍME $\dim M_\lambda$.

– PŘ 9.70: $T = \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow$ $p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 = (\lambda-3)^2$ $\rightsquigarrow$ MÁME VL. Č. 3 S ALG. NÁSOBNOSTÍ 2

$\rightsquigarrow$ $M_3 = \operatorname{Ker}(A - 3I_2) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = LO\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ $\rightsquigarrow$ GEOMETRICKÁ NÁSOBNOST VL. Č. 3 JE ROVNA 1

– **T9.69**: MÁME-LI LINEÁRNÍ OPERÁTOR $f: V \to V$ NA KON. DIM. VEKTOROVÉM PROSTORU $V$ NAD $T$ A MÁME-LI VLASTNÍ ČÍSLO $\lambda$ OPERÁTORU $f$, PAK

$$(1 \leq)\ (\text{GEOMETRICKÁ NÁSOBNOST } \lambda) \leq (\text{ALGEBRAICKÁ NÁSOBNOST } \lambda)$$

---

– POTŘEBUJEME POMOCNÉ TVRZENÍ O DETERMINANTECH

- POZOROVÁNÍ: $\det \begin{pmatrix} b & c \\ 0 & d \end{pmatrix} = bd$

– **T9.68**: BUĎ $T$ TĚLESO $1 \leq k < n$ A BUĎ $A$ MATICE TVARU

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} & k & n-k \\ \hline k & B & C \\ \hline n-k & 0 & D \end{array}\right)$$

PAK $\det A = (\det B) \cdot (\det D)$

---

- **Tg. 68**: BUĎ T TĚLESO $1 \le k < n$ A BUĎ A MATICE TVARU

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} k & n-k \end{array} \\ \begin{array}{c} k \\ n-k \end{array} & \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} \end{array}$$

PAK $\det A = (\det B) \cdot (\det D)$

---

- **Dk**: - INDUKCÍ PODLE $k$:
  - **PŘÍPAD $k=1$**:

$$A = \begin{pmatrix} \overset{B}{a_{11}} & \overbrace{a_{12} \;\cdots\; a_{1n}}^{C} \\ 0 & \\ \vdots & D \\ 0 & \end{pmatrix}$$

$M_{ij}$ = MATICE $(n-1) \times (n-1)$, VYNECHÁME $i$-TÝ ŘÁDEK A $j$-TÝ SLOUPEC Z MATICE A

- POUŽIJEME ROZVOJ $\det A$ PODLE 1. SLOUPCE:

$$\det A = \underbrace{a_{11}}_{\det B} \cdot \underbrace{\det M_{11}}_{\det D} - \underbrace{a_{21}}_{=0} \cdot \cancel{\det M_{21}} + \underbrace{a_{31}}_{=0} \cdot \cancel{\det M_{31}} - \dots + (-1)^{n+1} \underbrace{a_{n1}}_{=0} \cancel{\det M_{n1}}$$

---

- **PŘÍPAD $k>1$**:

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \begin{array}{c} a_{11} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{array} & B & C \\ \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} & 0 & D \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \}\, k \\ \}\, n-k \end{array} \\ \begin{array}{ccc} 1 & k-1 & n-k \end{array} & \end{array}$$

$B_{ij}$ = MATICE $(k-1) \times (k-1)$, VYNECHÁME ŘÁDEK A SLOUPEC Z B

$C_i$ = MATICE $(k-1) \times (n-k)$, VYNECHÁME $i$-TÝ ŘÁDEK Z C

-**Dk**: (POKRAČOVÁNÍ)

-PŘÍPAD $k>1$:

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} a_{11} & & \\ \vdots & B_{11} & C \\ a_{k1} & & \\ \hline 0 & & \\ \vdots & 0 & D \\ 0 & & \end{array}\right) \begin{array}{l} \}\, k \\ \\ \}\, n-k \end{array}$$

$$\underbrace{\phantom{a}}_{1}\ \underbrace{\phantom{aaa}}_{k-1}\ \underbrace{\phantom{aaaaa}}_{n-k}$$

$B_{ij}$ = MATICE $(k-1)\times(k-1)$, VYNECHÁME ŘÁDEK A SLOUPEC Z B

$C_i$ = MATICE $(k-1)\times(n-k)$, VYNECHÁME $i$-TÝ ŘÁDEK Z C

$$\det A \overset{\text{ROZVOJ } \det A \text{, 1. SLOUPEC}}{=} a_{11}\det M_{11} - a_{21}\det M_{21} + a_{31}\cdot\det M_{31} - \ldots + (-1)^{k+1}a_{k1}\det M_{k1}$$

$$= a_{11}\cdot\det\left(\begin{array}{c|c} B_{11} & C_1 \\ \hline 0 & D \end{array}\right) - a_{21}\det\left(\begin{array}{c|c} B_{21} & C_2 \\ \hline 0 & D \end{array}\right) + \ldots + (-1)^{k+1}a_{k1}\cdot\det\left(\begin{array}{c|c} B_{k1} & C_k \\ \hline 0 & D \end{array}\right)$$

$$\overset{\text{IND. PŘEDP.}}{=} a_{11}(\det B_{11})(\det D) - a_{21}(\det B_{21})(\det D) + \ldots + (-1)^{k+1}a_{k1}(\det B_{k1})(\det D)$$

$$\overset{\text{ROZVOJ } \det B\text{, 1. SLOUPEC}}{=} \left(a_{11}\det B_{11} - a_{21}\det B_{21} + \ldots + (-1)^{k+1}\det B_{k+1}\right)\cdot(\det D)$$

$$= (\det B)(\det D).$$

□

- **T9.69**: MÁME-LI LINEÁRNÍ OPERÁTOR $f: V \to V$ NA KON. DIM. VEKTOROVÉM PROSTORU $V$ NAD $T$ A MÁME-LI VLASTNÍ ČÍSLO $\mu$ OPERÁTORU $f$, PAK

$$(\text{GEOMETRICKÁ NÁSOBNOST } \mu) \leq (\text{ALGEBRAICKÁ NÁSOBNOST } \mu)$$

- DK: - BUĎ $k$ GEOMETRICKÁ NÁSOBNOST VL. Č. $\mu$ (TJ. $1 \leq k \leq n := \dim V$)
  - TJ. $\dim M_\mu = k$, KDE $M_\mu = \{v \in V : f(v) = \mu v\} \leq V$
  - VEZMEME SI BÁZI $(v_1, -, v_k)$ PROSTORU $M_\mu$ A DOPLNÍME NA BÁZI $B = (v_1, --, v_k, v_{k+1}, --, v_n)$ PROSTORU $V$
  - JAK POTOM VYPADÁ $A := [f]^B_B$ ?

$$A = [f]^B_B = \left( [f(v_1)]_B \middle| [f(v_2)]_B \middle| \ldots \middle| [f(v_k)]_B \middle| [f(v_{k+1})]_B \middle| \ldots \right) =$$

$$= \left( [\mu v_1]_B \middle| [\mu v_2]_B \middle| \ldots \middle| [\mu v_k]_B \middle| [f(v_{k+1})]_B \middle| \ldots \right) =$$

$$= \begin{array}{r} k\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \\ n-k\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right. \end{array} \left( \underbrace{\begin{array}{c|c|c|c|c} \mu & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & \mu & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \mu & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & \mu \\ \hline 0 & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{array}}_{k} \middle| \underbrace{\quad \ldots \ldots \quad}_{n-k} \right) = \left( \begin{array}{c|c} \mu \cdot I_k & C \\ \hline O & D \\ \end{array} \right) \begin{array}{l} \}k \\ \}n-k \end{array}$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underbrace{\qquad}_{k} \; \underbrace{\qquad}_{n-k}$$

-**Dk**: (POKRAČOVÁNÍ)

$$\rightsquigarrow A = [f]_B^B = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} \mu \cdot I_k & C \\ \hline 0 & D \end{array}\right) \begin{array}{l} \}\, k \\ \}\, n-k \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\quad}_{k} & \underbrace{\quad\quad}_{n-k} \end{array} \end{array} \quad , \quad k = \text{GEOM. NÁSOBNOST } \mu \in T$$

$$\rightsquigarrow p_f(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I_n) = \left|\begin{array}{c|c} (\mu-\lambda) I_k & C \\ \hline 0 & D-\lambda I_{n-k} \end{array}\right| \overset{T9.68}{=}$$

$$= \det\Big(\underbrace{(\mu-\lambda)\cdot I_k}_{k\left\{\begin{pmatrix} \mu-\lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu-\lambda \end{pmatrix}\right. \atop \underbrace{\qquad\qquad}_{k}}\Big) \cdot \det\Big(\underbrace{D-\lambda \cdot I_{n-k}}_{\text{POLYNOM V } \lambda \atop \text{STUPNĚ } n-k}\Big) = (\mu-\lambda)^k \cdot \left(\text{POLYNOM V } \lambda \text{ STUPNĚ } {n-k}\right)$$

$\Rightarrow$ $p_f(\lambda)$ MÁ $\mu$ JAKO ALESPOŇ $k$-NÁSOBNÝ KOŘEN

$\Rightarrow$ ALGEBRAICKÁ NÁSOBNOST $\mu$ JE ALESPOŇ $k$. □

- **V9.71:** BUĎ $f: V \to V$ LINEÁRNÍ OPERÁTOR NA V.P. DIMENZE $n$ NAD T. PAK PLATÍ:

① $f$ JE DIAGONALIZOVATELNÝ.

② $f$ MÁ $n$ VLASTNÍCH ČÍSEL VČETNĚ ALG. NÁSOBNOSTÍ A SOUČASNĚ GEOMETRICKÁ NÁSOBNOST KAŽDÉHO VL. Č. JE ROVNA JEHO ALGEBRAICKÉ NÁSOBNOSTI.

---

- **DK:** ① ⇒ ②: – PŘEDP.: $f$ DIAGONALIZOVATELNÝ, TEDY MÁME BÁZI $B = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ Z VL. VEKTORŮ

- ŘEKNĚME ŽE

$\underbrace{v_1, \dots, v_{m_1}}_{m_1}$ JSOU VL. VEKTORY PŘÍSLUŠNÉ VL. Č. $\lambda_1$

$\underbrace{v_{m_1+1}, \dots, v_{m_1+m_2}}_{m_2}$ —— " —— $\lambda_2$

⋮ ⋮

$\underbrace{v_{m_1+\dots+m_{k-1}+1}, \dots, v_n}_{m_k}$ —— " —— $\lambda_k$

$\lambda_1, \dots, \lambda_k \in T$ PO 2 RŮZNÉ

⇒ $\forall i \in \{1, \dots, k\}$: GEOM. NÁSOBNOST $\lambda_i$ JE $\geq m_i$

$\underset{T9.69}{\Rightarrow}$ $\forall i \in \{1, \dots, k\}$: ALG. NÁSOBNOST $\lambda_i$ JE $\geq m_i$

– NA DRUHOU SOUČET ALG. NÁSOBNOSTÍ $n_i$ VŠECH VL. ČÍSEL JE $\leq n$

⇒ $n = m_1 + m_2 + \dots + m_k \leq n_1 + \dots + n_k \leq n$ ⇒ $\forall i$: $m_i = n_i =$ ALG. NÁS. = GEOM. NÁS.

- **V9.71**: BUĎ $f: V \to V$ LINEÁRNÍ OPERÁTOR NA V.P. DIMENZE $n$ NAD T.
PAK NTJE:

① $f$ JE DIAGONALIZOVATELNÝ.

② $f$ MÁ $n$ VLASTNÍCH ČÍSEL VČETNĚ ALG. NÁSOBNOSTI A SOUČASNĚ GEOMETRICKÁ NÁSOBNOST KAŽDÉHO VL. Č. JE ROVNA JEHO ALGEBRAICKÉ NÁSOBNOSTI.

---

- **Dk** (POKRAČOVÁNÍ): ② ⇒ ①:

- BUĎ $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ VL. Č., PO 2 RŮZNÁ

⇝ $m_i :=$ ALG. NÁSOBNOST $\lambda_i \overset{\text{PŘEDP.}}{=}$ GEOM. NÁS. $\lambda_i = \dim M_{\lambda_i}$
& $n = m_1 + \dots + m_k$

⇝ $\forall i$: ZVOLME BÁZI $M_{\lambda_i}$: $B_i = (v_1^i, v_2^i, \dots, v_{m_i}^i)$

⇝ UKÁŽE SE, ŽE $B = (v_1^1, \dots, v_{m_1}^1, v_1^2, \dots, v_{m_2}^2, \dots, v_1^k, \dots, v_{m_k}^k)$
JE BÁZE $V$ (TJ. $V = M_{\lambda_1} \oplus M_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus M_{\lambda_k}$)

- $B$ MÁ $n = \dim V$ PRVKŮ ⇒ STAČÍ DOKÁZAT, ŽE $B$ JE LN

- UVAŽUJME

$$0 = \underbrace{a_1^1 \cdot v_1^1 + a_2^1 v_2^1 + \dots + a_{m_1}^1 v_{m_1}^1}_{w_1 \in M_{\lambda_1}} + \underbrace{a_1^2 v_1^2 + \dots + a_{m_2}^2 v_{m_2}^2}_{w_2 \in M_{\lambda_2}} + \dots + \underbrace{a_1^k v_1^k + \dots + a_{m_k}^k v_{m_k}^k}_{w_k \in M_{\lambda_k}}$$

-Dk (POKR.) - UVAŽUJME

$$0 = \underbrace{a_1^1 \cdot v_1^1 + a_2^1 v_2^1 + \dots + a_{m_1}^1 v_{m_1}^1}_{w_1 \in M_{\lambda_1}} + \underbrace{a_1^2 v_1^2 + \dots + a_{m_2}^2 v_{m_2}^2}_{w_2 \in M_{\lambda_2}} + \dots + \underbrace{a_1^k v_1^k + \dots + a_{m_k}^k v_{m_k}^k}_{w_k \in M_{\lambda_k}}$$

$$0 = w_1 + w_2 + \dots + w_k$$

- VYBERME $w_{i_1}, \dots, w_{i_\ell}$ VŠECHNY NENULOVÉ VEKTORY Z $(w_1, \dots, w_k)$

- JE-LI $\ell \geq 1$, PAK $(w_{i_1}, \dots, w_{i_\ell})$ JE LN (PROTOŽE JSOU TO VL. VEKTORY PŘÍSLUŠNÉ PO 2 RŮZNÝM VL. Č.) | SPOR S $1 \cdot w_{i_1} + \dots + 1 \cdot w_{i_\ell} = 0$ !

$\Rightarrow \ell = 0$, TJ. $w_i = 0 \quad \forall i$

$B_i$: LN $\forall i$

$\Rightarrow a_j^i = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, k\} \quad \forall j \in \{1, \dots, m_i\}$

- DOKÁZALI JSME TEDY LN POSLOUPNOSTI B □