- POZOR NA ZMĚNY TERMÍNŮ V SOUVISLOSTI SE SVÁTKY!

DIAGONALIZOVATELNOST MATIC A LINEÁRNÍCH OPERÁTORŮ

- <u>DEF 9.54</u>: T TĚLESO, V KON. GEN. VEKTOROVÝ PROSTOR, $f: V \to V$ LIN. OPERÁTOR. PAK f JE DIAGONALIZOVATELNÝ, POKUD $\exists$ BÁZE B PROSTORU V TAKOVÁ, ŽE $[f]_B^B$ JE DIAGONÁLNÍ, TJ.

$$[f]_B^B = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{n = \dim V} \Big\} n$$

- <u>ZNAČENÍ</u>: $$n\Big\{\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{n} =: \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

- ŘEKNĚME, ŽE $[f]_B^B = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $B = (v_1, \ldots, v_n)$
- PAK $[f(v_i)]_B = [f]_B^B \cdot [v_i]_B = [f]_B^B \cdot e_i = \lambda_i \cdot e_i = \lambda_i \cdot [v_i]_B \implies f(v_i) = \lambda_i \cdot v_i$
- TJ. ZA TĚCHTO PŘEDPOKLADŮ JE KAŽDÉ λ_i VLASTNÍ ČÍSLO A v_i VLASTNÍ VEKTOR PŘÍSLUŠNÝ K λ_i
- NA DRUHOU STRANU, POKUD $B = (v_1, \ldots, v_n)$ JE BÁZE Z VL. VEKTORŮ f, KDE $\forall i: f(v_i) = \lambda_i v_i$, PAK $[f]_B^B = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

- **T 9.55:** BUĎ $f: V \to V$ LIN. OPERÁTOR NA KON. GEN. V. P. V NAD T A BUĎ $B = (v_1, \dots, v_n)$ NĚJAKÁ BÁZE. PAK:

$$[f]_B^B = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \iff \forall i: v_i \text{ JE VLASTNÍ VEKTOR PŘÍSLUŠNÝ K } \lambda_i.$$

- **DŮSL 9.56:** f DIAGONALIZOVATELNÝ $\iff$ V MÁ BÁZI Z VL. VEKTORŮ f

---

- DIAGONALIZOVATELNOST PRO MATICE

- **DEF 9.58:** BUĎ T TĚLESO A A ČTVERCOVÁ MATICE ŘÁDU n NAD T. PAK A JE DIAGONALIZOVATELNÁ, POKUD JE $f_A: T^n \to T^n$ DIAGONALIZOVATELNÝ LIN. OPERÁTOR.

- **DŮSL 9.60:** A JE DIAGONALIZOVATELNÁ $\iff$ T^n MÁ BÁZI Z VL. VEKTORŮ A

- **PŘ:** $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $T = \mathbb{R}$ ... BÁZE $B = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ JE TVOŘENA VL. VEKTORY

$\rightsquigarrow$ A DIAGONALIZOVATELNÁ

- **PŘ:** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $T = \mathbb{R}$

... CHARAKTERISTICKÝ POLYNOM $p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 = \lambda^2 - 4\lambda + 4$

... VLASTNÍ ČÍSLA: JENOM 2, S ALGEBRAICKOU NÁSOBNOSTÍ 2

... VLASTNÍ VEKTORY: $M_2 = \operatorname{Ker}(A - 2 \cdot I_2) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = LO\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

$\rightsquigarrow$ $\nexists$ BÁZE $\mathbb{R}^2$ Z VLASTNÍCH VEKTORŮ, A NENÍ DIAGONALIZOVATELNÁ!

$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $T = \mathbb{R}$ -- JE DIAGONALIZOVATELNÁ, $p_{\tilde{A}} = (2-\lambda)^2$

- MĚJME $A \in T^{n\times n}$ $\rightsquigarrow$ $f_A : T^n \to T^n$
- POKUD JE $B=(v_1,\dots,v_n)$ BÁZE T^n, JAK VYPADÁ $[f_A]^B_B$?
- VÍME: $A = [f_A]^{K_n}_{K_n}$, $[f_A]^B_B = \underbrace{[id]^{K_n}_B}_{R^{-1}} \underbrace{[f_A]^{K_n}_{K_n}}_{A} \underbrace{[id]^B_{K_n}}_{R}$

$$R = \left([v_1]_{K_n} \middle| \dots \middle| [v_n]_{K_n} \right) = \left(v_1 \middle| v_2 \middle| \dots \middle| v_n \right)$$

- ZÁVĚR: JE-LI $A \in T^{n\times n}$, PAK PRO $C \in T^{n\times n}$ PLATÍ

$C = [f_A]^B_B$ VZHLEDEM K NĚJAKÉ BÁZI B PROSTORU T^n $\iff$ C JE PODOBNÁ MATICI A

- T 9.61 & DŮSL 9.60: BUĎ $A \in T^{n\times n}$. PAK NTJE:
  1. A JE DIAGONALIZOVATELNÁ,
  2. T^n MÁ BÁZI Z VL. VEKTORŮ MATICE A,
  3. A JE PODOBNÁ DIAGONÁLNÍ MATICI

  (TJ. $\exists$ R REGULÁRNÍ ŘÁDU n A $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in T$ TAK, ŽE $R^{-1}AR = \operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$)

– LINEÁRNÍ NEZÁVISLOST VLASTNÍCH VEKTORŮ A „RYCHLÉ" OVĚŘOVÁNÍ DIAGONALIZOVATELNOSTI V NĚKTERÝCH PŘÍPADECH

– **Vg. 62**: BUĎ T TĚLESO A $f: V \to V$ LINEÁRNÍ OPERÁTOR NA V.P. V NAD T. JE-LI $(v_1, \dots, v_m)$ POSLOUPNOST $\neq 0$ VLASTNÍCH VEKTORŮ f POPOŘADĚ PŘÍSLUŠNÝCH K VLASTNÍM ČÍSLŮM $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ A $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ JSOU PO 2 RŮZNÁ, PAK JE $(v_1, \dots, v_m)$ LINEÁRNĚ NEZÁVISLÁ.

– **Dk**: INDUKCÍ PODLE m

- $m = 1$: $v_1 \neq 0 \iff (v_1)$ LN
- $m > 1$: UVAŽUJME $a_1, \dots, a_{m-1}, a_m \in T$ TAKOVÁ, ŽE

$$a_1 v_1 + \dots + a_{m-1} v_{m-1} + a_m v_m = 0$$

$f(-)$:

$$a_1 f(v_1) + \dots + a_{m-1} f(v_{m-1}) + a_m f(v_m) = 0$$

$$(1) \quad \lambda_1 a_1 v_1 + \dots + \lambda_{m-1} a_{m-1} v_{m-1} + \lambda_m a_m v_m = 0$$

$\lambda_m \cdot -$:

$$(2) \quad \lambda_m a_1 v_1 + \dots + \lambda_m a_{m-1} v_{m-1} + \lambda_m a_m v_m = 0$$

$$(1) - (2) \quad (\lambda_1 - \lambda_m) a_1 v_1 + \dots + (\lambda_{m-1} - \lambda_m) a_{m-1} v_{m-1} = 0$$

– PODLE INDUKČNÍHO PŘEDP. JSOU $v_1, \dots, v_{m-1}$ LN, TJ.

$$\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_m)}_{\neq 0} a_1 = \dots = \underbrace{(\lambda_{m-1} - \lambda_m)}_{\neq 0} a_{m-1} = 0$$

$$\overset{\text{PŘEDP. V.}}{\Longrightarrow} \quad a_1 = \dots = a_{m-1} = 0$$

PŘEDPOKLADY VĚTY

$$\Rightarrow a_m v_m = 0$$

$$\underset{v_m \neq 0}{\Rightarrow} a_m = 0 \quad \square$$

- DŮSL 9.63 / 9.64

① MÁ-LI LINEÁRNÍ OPERÁTOR $f: V \to V$ NA PROSTORU DIMENZE n n PO 2 RŮZNÝCH VL. ČÍSEL, PAK JE f DIAGONALIZOVATELNÝ.

② MÁ-LI ČTVERCOVÁ MATICE A ŘÁDU n n PO 2 RŮZNÝCH VL. ČÍSEL, PAK JE A DIAGONALIZOVATELNÁ.

- Dk: ① - BUĎTE $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ PO 2 RŮZNÁ VL. ČÍSLA

(TJ.: $\chi_f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \ldots (\lambda_n - \lambda)$)

- BUĎ $B = (v_1, \ldots, v_n)$ POSLOUPNOST PŘÍSLUŠNÝCH $\neq 0$ VL. VEKTORŮ

($\forall i: f(v_i) = \lambda_i \cdot v_i$)

$\xRightarrow{V\,9.61}$ B JE LN $\xRightarrow{\dim V = n}$ B JE BÁZE $\xRightarrow{9.56}$ f DIAGONALIZOVATELNÝ

② ANALOGICKÝ

– MOCNĚNÍ DIAGONALIZOVATELNÝCH MATIC

- VEZMĚME $A \in T^{n\times n}$ DIAGONALIZOVATELNÁ

$A \quad A^k \qquad R^{-1}AR = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) =: D$

$$\Rightarrow \quad A = R \cdot D \cdot R^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad A^k = (R D R^{-1})^k = \qquad k \geq 0 \qquad (A^0 \overset{\text{DEF}}{=} I_n)$$

$$\underbrace{R \cdot D \cancel{R^{-1}} \cdot \cancel{R} \cdot D \cdot \cancel{R^{-1}} \cdots \cancel{R} \cdot D \cdot R^{-1}}_{k}$$

$$= R \cdot D^k \cdot R^{-1} =$$

$$= R \cdot \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) \cdot R^{-1}$$

– PŘ: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \; T = \mathbb{R}$

$B = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$$\rightsquigarrow [f_A]_B^B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{R^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{R} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}_{\mathrm{diag}(2,3)}$$

$$\rightsquigarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow A^k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^k & 0 \\ 3^k - 2^k & 2^k \end{pmatrix}$$

– PŘ: FIBONACCIHO ČÍSLA
9.65

$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

$a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$

$(a_{k+1} = a_k + a_{k-1})$

$$\rightsquigarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_k \\ a_{k+1} \end{pmatrix}}_{x_k} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}^{A} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{k-1} \\ a_k \end{pmatrix}}_{x_{k-1}}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

DISKR. LIN. DYN. SYSTÉM — POČÁTEČNÍ STAV

$$\rightsquigarrow p_A(\lambda) = \underbrace{\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}}_{\det(A - \lambda I_2)} = -\lambda(1-\lambda) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1$$

$$\rightsquigarrow \text{VL. ČÍSLA}: \quad \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0{,}618$$

ZLATÝ ŘEZ

$$\Rightarrow A \text{ JE PODOBNÁ } \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow A^n \cdot x_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^k - \lambda_2^k \\ \lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1} \end{pmatrix} \rightsquigarrow a_k = \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1^k - \lambda_2^k) \overset{k \gg 0}{\approx} \frac{\lambda_1^k}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k$$

$$\left(\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k} = 1 \right)$$

$$\Uparrow$$

$$\left(\lim_{k\to\infty} \left(a_k - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k \right) = 0 \right)$$