VLASTNÍ ČÍSLA A VLASTNÍ VEKTORY

– DEF: BUĎ T TĚLESO, A ČTVERCOVÁ MATICE ŘÁDU n (TJ. MÁME $f_A : T^n \to T^n$)

- $\lambda \in T$ JE VLASTNÍM ČÍSLEM MATICE A, POKUD $\exists\, 0 \neq v \in T^n$ TAKOVÝ, ŽE

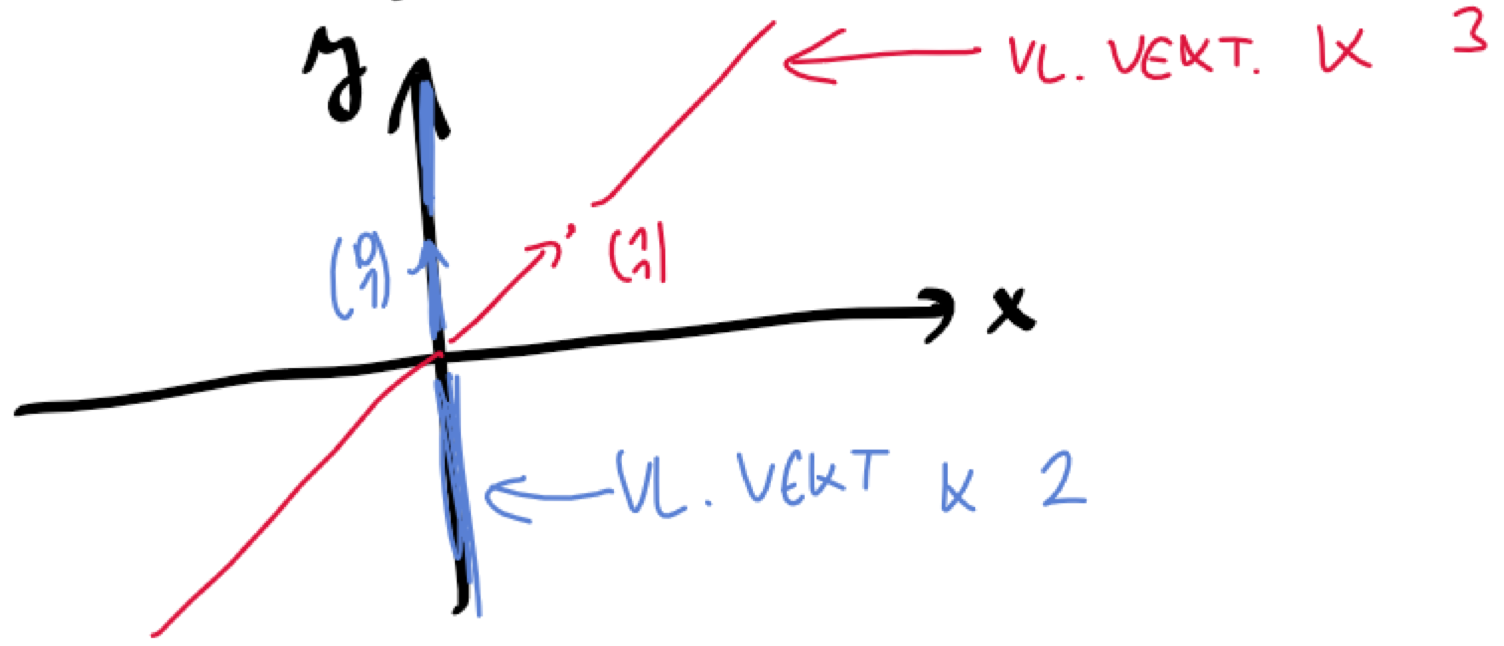
  $(f_A(v) =)\quad A \cdot v = \lambda \cdot v.$

- JE-LI $\lambda \in T$ VLASTNÍ ČÍSLO MATICE A, PAK $w \in T^n$ JE VLASTNÍM VEKTOREM PŘÍSLUŠNÝM K λ, POKUD

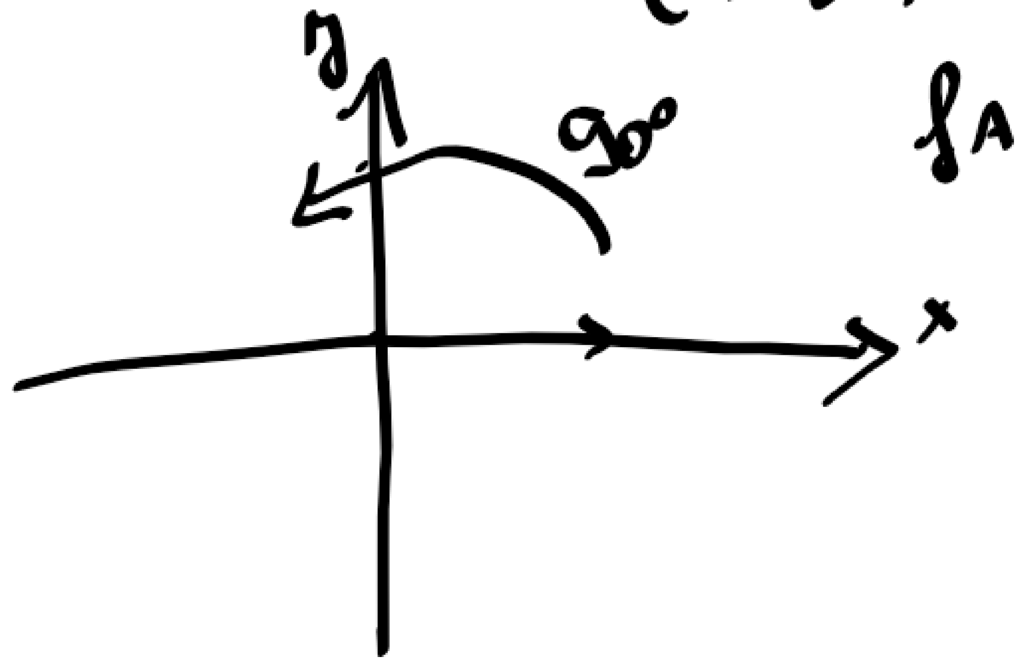
  $(f_A(w) \overset{!}{=})\quad A \cdot w = \lambda \cdot w.$

– PŘ: $T = \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, MÁME VL. ČÍSLA 2 A 3

– VLASTNÍ VEKTORY:



– PŘ: $T = \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$



A NEMÁ ŽÁDNÉ REÁLNÉ VLASTNÍ ČÍSLO

$T = \mathbb{C}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

A MÁ VLASTNÍ ČÍSLA i A $-i$

$$A \cdot \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix} = i \cdot \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -i \end{pmatrix} = (-i)\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

DEF: BUĎ T TĚLESO, V V.P. NAD T, $f: V \to V$ LINEÁRNÍ OPERÁTOR.

- $\lambda \in T$ JE <u>VLASTNÍM ČÍSLEM</u> OPERÁTORU f, POKUD $\exists\, 0 \neq v \in V$ TAKOVÝ, ŽE
$$f(v) = \lambda \cdot v.$$
- JE-LI $\lambda \in T$ VLASTNÍ ČÍSLO OPERÁTORU f, PAK $w \in V$ JE <u>VLASTNÍM VEKTOREM PŘÍSLUŠNÝM K λ</u>, POKUD
$$f(w) = \lambda \cdot w.$$

PŘ: $T = \mathbb{R}$, $V = \{ h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;:\; h$ MÁ SPOJITÉ DERIVACE LIBOVOLNÉHO ŘÁDU$\}$

$$D: V \longrightarrow V \qquad h \longmapsto h' = \frac{dh}{dx}$$

LINEÁRNÍ OPERÁTOR (= ENDOMORFISMUS)

- $h = e^x \rightsquigarrow D(h) = h \rightsquigarrow D$ MÁ VL. Č. 1, $h = e^x$ JE PŘÍSLUŠNÝ VLASTNÍ VEKTOR
- $\lambda \in \mathbb{R}$, $h = e^{\lambda x} \rightsquigarrow D(h) = \lambda \cdot h \rightsquigarrow D$ — " — λ, $h = e^{\lambda x}$ — " —

- KDY MÁ MATICE / OPERÁTOR VLASTNÍ ČÍSLO 0?

- <u>POZOROVÁNÍ 9.13/9.14:</u>

  - A MÁ VLASTNÍ ČÍSLO 0 $\iff \ker A \neq \{0\} \overset{A \text{ ČTVERCOVÁ}}{\iff} A$ SINGULÁRNÍ $\iff \det A = 0$.
  - f MÁ VLASTNÍ ČÍSLO 0 $\iff \ker f \neq \{0\}$.

NAVÍC PAK MNOŽINA VL. VEKTORŮ PŘÍSLUŠNÝCH K 0 JE PŘESNĚ $\ker A$ (RESP. $\ker f$).

- KDY JE $\lambda \in T$ VLASTNÍ ČÍSLO MATICE A, RESP. OPERÁTORU f?

$$
\begin{aligned}
A v &= \lambda v \\
\Updownarrow \\
A v &= (\lambda I_n) \cdot v \\
\Updownarrow \\
(A - \lambda I_n) \cdot v &= 0 \\
\Updownarrow \\
v &\in \ker (A - \lambda I_n)
\end{aligned}
\qquad\Bigg|\qquad
\begin{aligned}
f(v) &= \lambda v \\
\Updownarrow \\
f(v) &= (\lambda \cdot id_V)(v) \\
\Updownarrow \\
(f - \lambda \cdot id_V)(v) &= 0 \\
\Updownarrow \\
v &\in \ker (f - \lambda \cdot id_V)
\end{aligned}
$$

$\left(\begin{array}{l} f : V \to V \\ id_V : V \to V \end{array} \right)$

$$\boxed{\begin{aligned} &(f - \lambda \cdot id_V)(v) \\ &\quad \| \\ &f(v) - \lambda \cdot v \end{aligned}}$$

- <u>POZOROVÁNÍ 9.23/9.24/9.25:</u>

  - A MÁ VLASTNÍ ČÍSLO $\lambda \iff \ker (A - \lambda I_n) \neq \{0\} \iff A - \lambda I_n$ SINGULÁRNÍ $\iff \det (A - \lambda I_n) = 0$
  - f MÁ VLASTNÍ ČÍSLO $\lambda \iff \ker (f - \lambda \cdot id_V) \neq \{0\}$

NAVÍC MNOŽINA M_λ VLASTNÍCH VEKTORŮ A (RESP. f) PŘÍSLUŠNÝCH K λ JE V TOM PŘÍPADĚ ROVNA $\ker (A - \lambda I_n)$ (RESP $\ker (f - \lambda \cdot id_V)$). SPECIÁLNĚ $M_\lambda \leq T^n$ (RESP $M_\lambda \leq V$).

– POZOROVÁNÍ 9.23 / 9.24 / 9.25:

- A MÁ VLASTNÍ ČÍSLO λ $\Leftrightarrow$ $\ker(A-\lambda I_n) \neq \{0\}$ $\Leftrightarrow$ $A-\lambda I_n$ SINGULÁRNÍ $\Leftrightarrow$ $\underset{0}{\det(A-\lambda I_n)}$ ‖
- f MÁ VLASTNÍ ČÍSLO λ $\Leftrightarrow$ $\ker(f-\lambda\cdot id_V) \neq \{0\}$

NAVÍC MNOŽINA M_λ VLASTNÍCH VEKTORŮ A (RESP. f) PŘÍSLUŠNÝCH K λ JE V TOM PŘÍPADĚ ROVNA $\ker(A-\lambda I_n)$ (RESP $\ker(f-\lambda\cdot id_V)$) SPECIÁLNĚ $M_\lambda \subseteq T^n$ (RESP $M_\lambda \subseteq V$).

– PŘ: $T=\mathbb{R}$, $A=\begin{pmatrix}3&0\\1&2\end{pmatrix}$. SPOČÍTÁME VLASTNÍ ČÍSLA A VEKTORY.

– VLASTNÍ ČÍSLA: $\lambda\in\mathbb{R}$ JE VLASTNÍ Č. $\Leftrightarrow$ $\begin{vmatrix}3-\lambda&0\\1&2-\lambda\end{vmatrix}=0$

$\Leftrightarrow$ $\underbrace{(3-\lambda)(2-\lambda)}_{\lambda^2-5\lambda+6}=0$

$\Leftrightarrow$ $\lambda=2$ NEBO $\lambda=3$!

– VLASTNÍ VEKTORY:

$\lambda=2 \rightsquigarrow M_2=\ker(A-2\cdot I_2)=\ker\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}=LO\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\}$

$\lambda=3 \rightsquigarrow M_3=\ker(A-3I_2)=\ker\begin{pmatrix}0&0\\1&-1\end{pmatrix}=LO\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\}$

- CO DĚLAT, POKUD CHCEME URČIT VL. Č. A VEKTORY OPERÁTORU $f: V \to V$, KDYŽ JE V KONEČNĚ GENEROVANÝ?

- ZVOLÍME SI BÁZI B; PAK

$$f(v) = \lambda v$$
$$\Updownarrow$$
$$[f]^B_B [v]_B = \lambda \cdot [v]_B$$
$$\Updownarrow$$
$$[v_B] \in \ker\left([f]^B_B - \lambda \cdot I_n\right)$$

$\boxed{\dim V = |B|}$

DEF 9.27!

MATICE OPERÁTORU f VZHLEDEM K BÁZI B

(MÍSTO DELŠÍHO „VZHLEDEM K BÁZÍM B A B")

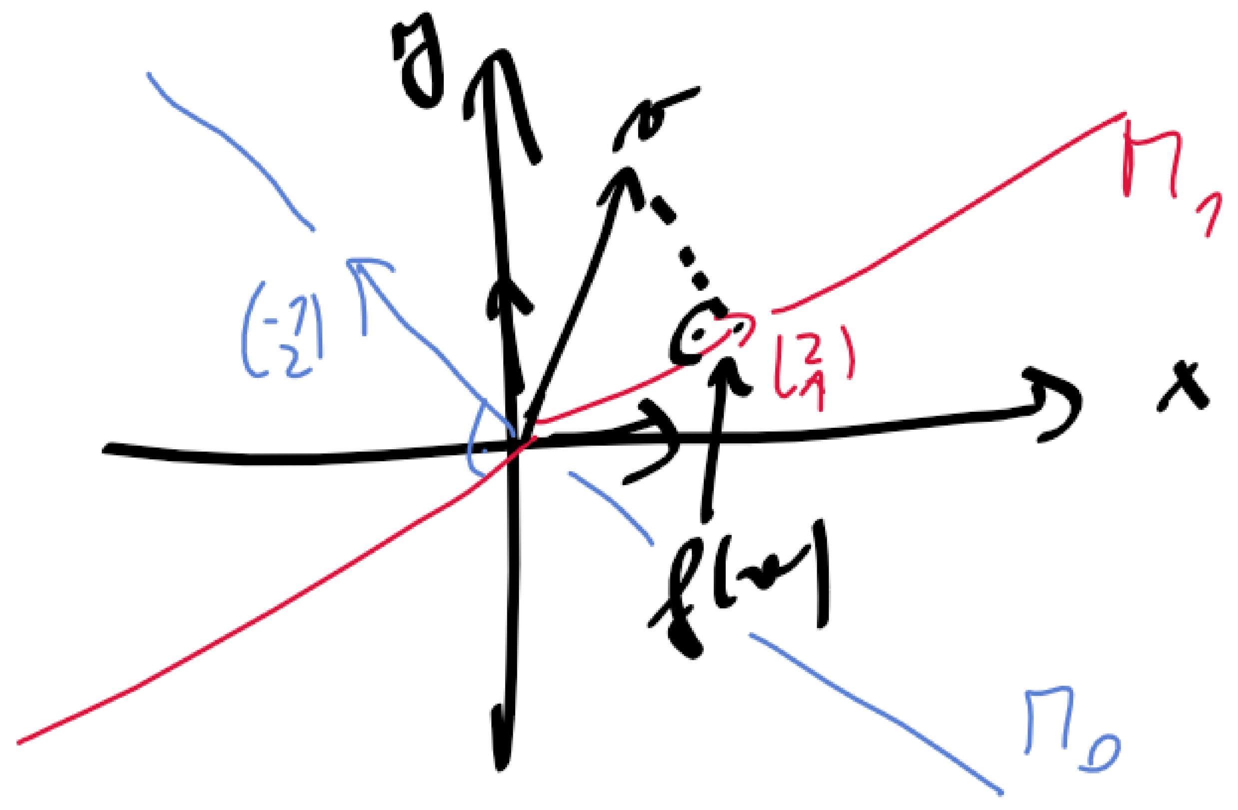
- PŘ: $T = \mathbb{R}$, $V = \{$ POLYNOMY NAD $\mathbb{R}$ STUPNĚ $\leq 2\}$ $\rightsquigarrow$ BÁZE $B = \{1, x, x^2\}$

$D: h \longmapsto h'$, $V \longrightarrow V$, $[D]^B_B = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A}$

$\rightsquigarrow$ VL. Č.: λ JE VL. Č. $\iff$ $\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff -\lambda^3 = 0$

$\rightsquigarrow$ JEDINÉ VLASTNÍ ČÍSLO 0 A $M_0 = \{$ KONST. POLYNOMY$\}$

- PŘ: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ORTOGONÁLNÍ PROJEKCE NA $LO\{\binom{2}{1}\}$



JAKÁ JSOU VL. Č. (A JAKÉ JSOU VL. V.) f?

- BÁZE $B = \left(\binom{2}{1}, \binom{-1}{2} \right)$

$\rightsquigarrow [f]^B_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\lambda$ $\Rightarrow$ VL. ČÍSLA JSOU $0, 1$

$\Rightarrow M_0 = LO\{\binom{-1}{2}\} = \ker(f)$

$\Rightarrow M_1 = LO\{\binom{2}{1}\} = \ker(f - id_{\mathbb{R}^2})$

$= \{v \in \mathbb{R}^2 : f(v) = v\}$

– CHARAKTERISTICKÝ POLYNOM MATICE / OPERÁTORU

– **DEF 9.33:** A ČTVERCOVÁ MATICE NAD TĚLESEM T, PAK **CHARAKTERISTICKÝM POLYNOMEM A** ROZUMÍME POLYNOM V λ

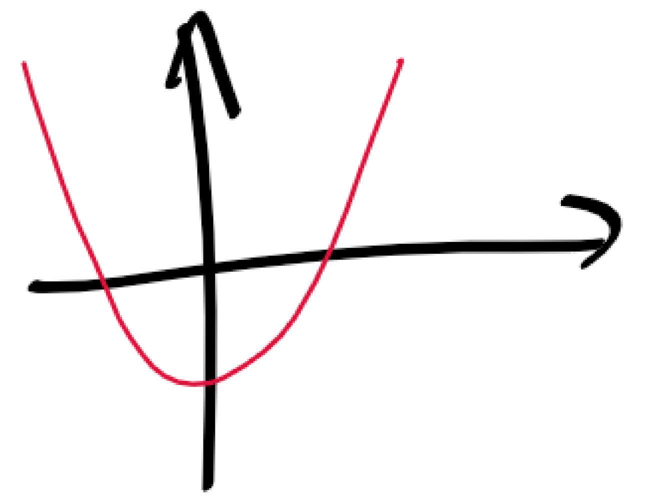
$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

← ŘÁD MATICE A

– NA $p_A(\lambda)$ SE MŮŽEME DÍVAT JAKO NA

(1) POLYNOMIÁLNÍ FUNKCI $T \to T$

$$\lambda \mapsto \det(A - \lambda I_n)$$



$T = \mathbb{R}$

PREFEROVANÝ POHLED → (2) FORMÁLNÍ POLYNOM, TJ. VÝRAZ $a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_n\lambda^n$

$a_0, a_1, \dots, a_n \in T$, $a_n \neq 0$

– JAKÝ JE MEZI (1) A (2) ROZDÍL:

– PRO NEKONEČNÁ TĚLESA MINIMÁLNÍ (RŮZNÉ FORMÁLNÍ POLYNOMY URČUJÍ RŮZNÉ FUNKCE)

– PRO $\mathbb{Z}_2$: $\lambda^2 + \lambda$ URČUJE FUNKCI $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$

$$0 \mapsto 0^2 + 0 = 0$$
$$1 \mapsto 1^2 + 1 = 0$$

- T 9.32: BUĎ $A = (a_{ij})$ MATICE ŘÁDU n NAD T A $p_A(\lambda)$ CHARAKTERISTICKÝ POLYNOM. PAK

1. $p_A(\lambda)$ JE POLYNOM STUPNĚ n.
2. KOEFICIENT U λ^n JE ROVEN $(-1)^n$
3. KOEFICIENT U λ^{n-1} JE ROVEN $(-1)^{n-1} \cdot \underbrace{(a_{11} + \dots + a_{nn})}_{\text{STOPA MATICE } A}$
4. ABSOLUTNÍ ČLEN $p_A(\lambda)$ JE ROVEN $\det(A)$

- JAK SE DEFINUJE CHAR. POLY. OPERÁTORU $f: V \to V$, V KON. GEN.
- ZVOLÍME BÁZI B, POLOŽÍME $p_f(\lambda) = \det\left([f]_B^B - \lambda \cdot I_n\right)$

dim $V = |B|$

- CO KDYŽ ZVOLÍME JINOU BÁZI? TŘEBA C? DOSTANEME STEJNÝ POLYNOM?
- ANO!

$$[f]_C^C = \left([id]_B^C\right)^{-1} \cdot [f]_B^B \cdot [id]_B^C$$

$$[f]_C^C - \lambda I_n = \underbrace{\left([id]_B^C\right)^{-1}}_{R^{-1}} \left([f]_B^B - \lambda \cdot I_n\right) \cdot \underbrace{[id]_B^C}_{R}$$

- DEF: ČTVERCOVÉ MATICE X A Y JSOU PODOBNÉ, POKUD $Y = RXR^{-1}$ PRO R REGULÁRNÍ.
- T 9.36: X, Y PODOBNÉ $\Rightarrow$ $p_X(\lambda) = p_Y(\lambda)$

- **KANONICKÁ BÁZE** (DOTAZ PO PŘEDN.):

T TĚLESO, $V = T^n$ $\rightsquigarrow$ $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, kde $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_1$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_2$, $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = e_2$

- **PŘ**: $T = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C}^2$ $\rightsquigarrow$ $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- **VŽDY**: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n$

$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in T^n$

- **PŘ**: NA $\mathbb{C}$ SE LZE DÍVAT JAKO NA:
  - KOMPLEXNÍ V. P. (S BÁZÍ (1)),
  - REÁLNÝ V. P. (S BÁZÍ $(1, i)$).