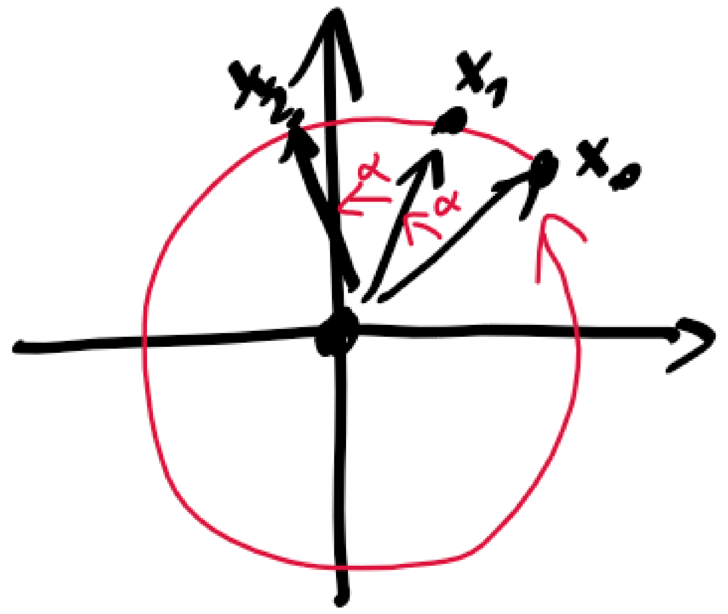
- U přednášek z minulého týdne: krátké video o metodě nejmenších čtverců (J. Papež)

Lineární dynamické systémy, vlastní čísla a vlastní vektory

- Diskrétní lineární dynamické systémy

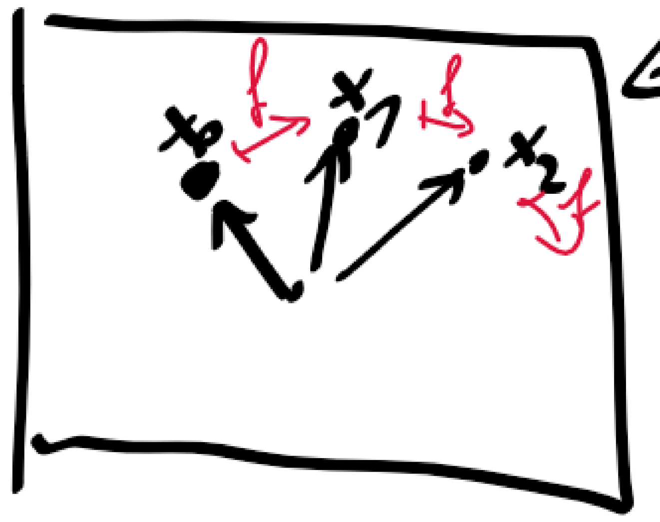
- Př.: $V=\mathbb{R}^2$



$A = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow f_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$x \longmapsto A \cdot x$



← prostor stavů (vektorový prostor V nad T)

x_0 ... počáteční stav

$x_0, x_1, x_2, \dots$ všechny stavy (vývoj systému)

$f : V \longrightarrow V$ lineární operátor (= endomorfismus)

Požadujeme: $\forall i \geq 1 : \; x_i = f(x_{i-1})$

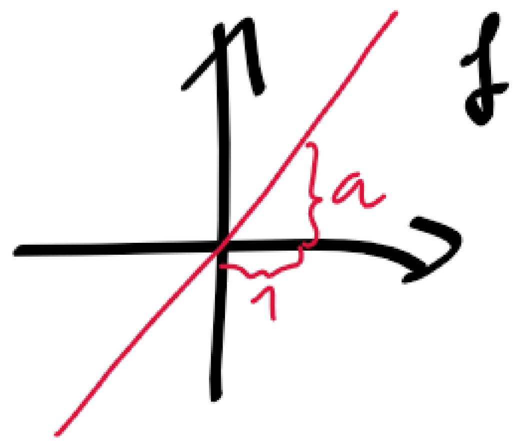
- Cíl: pochopit chování diskr. lin. dyn. systému kvalitativně
- Matematicky:
  - $x_i = f(x_{i-1}) = f(f(x_{i-2})) = \dots = \underbrace{f(f(\dots f}_{i}(x_0))) = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{i}(x_0) = f^i(x_0)$
  - $V = T^n$, $f = f_A$: $x_i = A^i x_0$

Jak se chová f^i nebo A^i pro $i \gg 0$?

– **PŘ**: FR, $V = \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a \cdot x$ $\rightsquigarrow$ $x_0 \in \mathbb{R}$

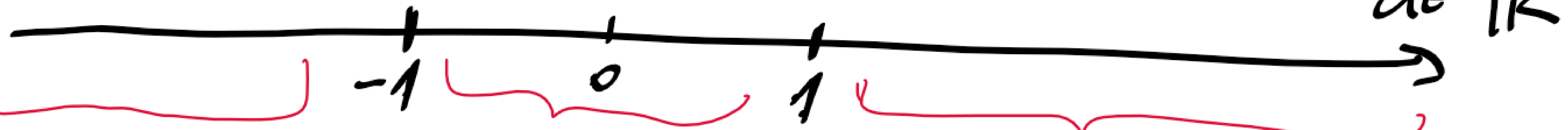
$$x_i = f^i(x_0) = a^i x_0$$

$$x_i = f(x_{i-1}) = a\, x_{i-1}$$



$\rightsquigarrow$ $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$ JE GEOMETRICKÁ POSLOUPNOST

$x_1 = a x_0$, $x_2 = a^2 x_0$, $x_3 = a^3 x_0$



$a < -1$: $|x_i| \to \infty$

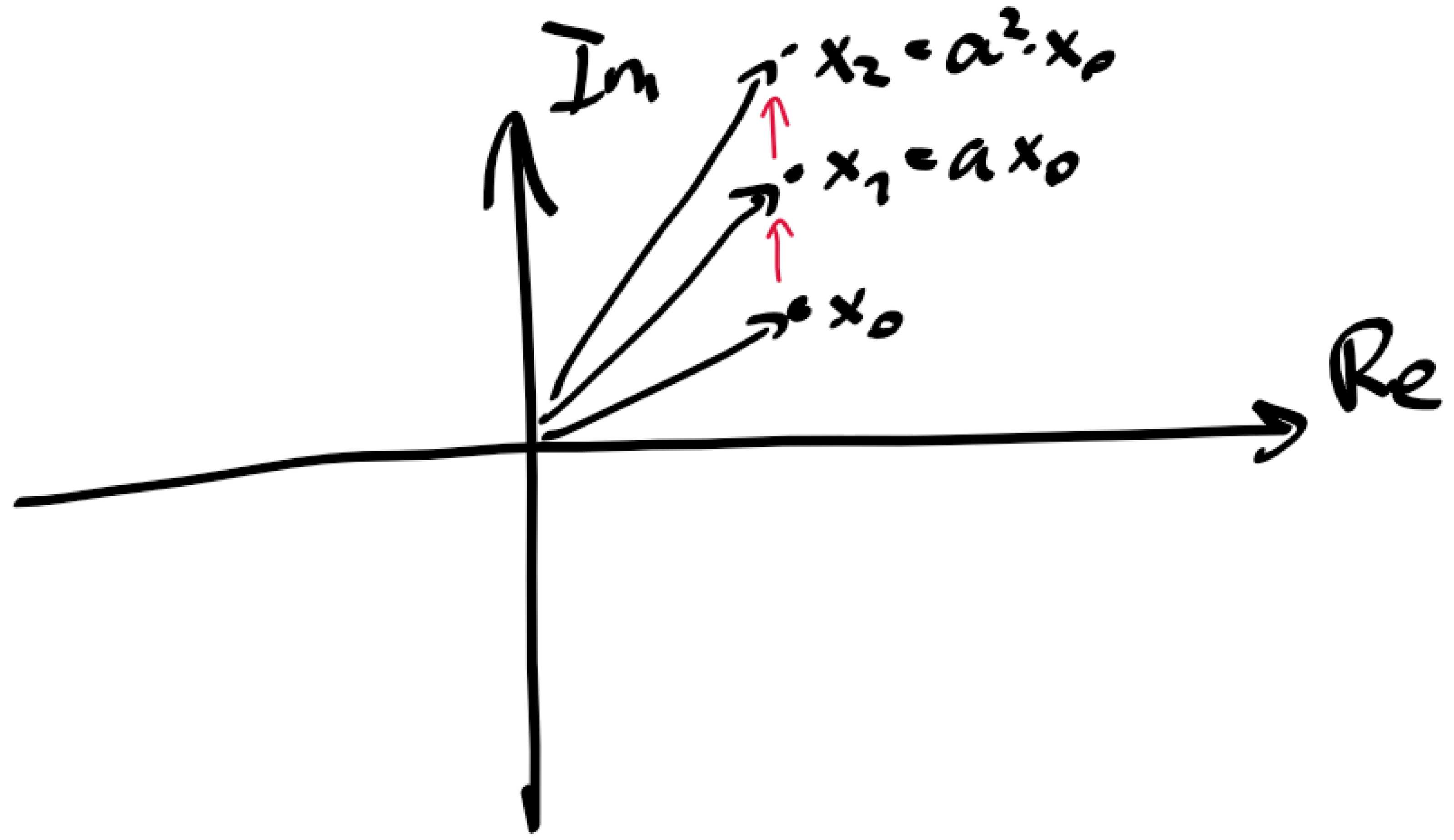
$a \in (-1, 1)$: $x_i \to 0$

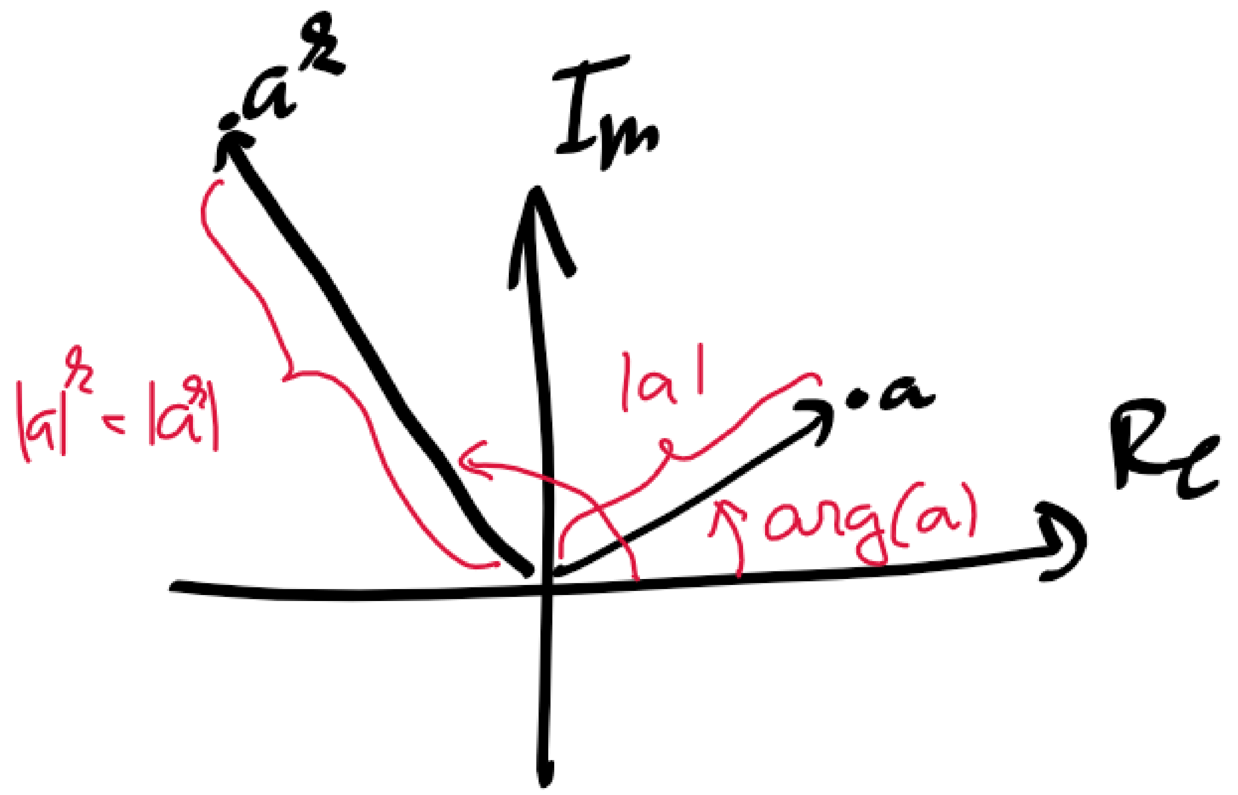
$a > 1$: $x_i \to \pm\infty$

$a = -1$: $(x_0, x_1, x_2, \dots) = (x_0, -x_0, x_0, -x_0, \dots)$

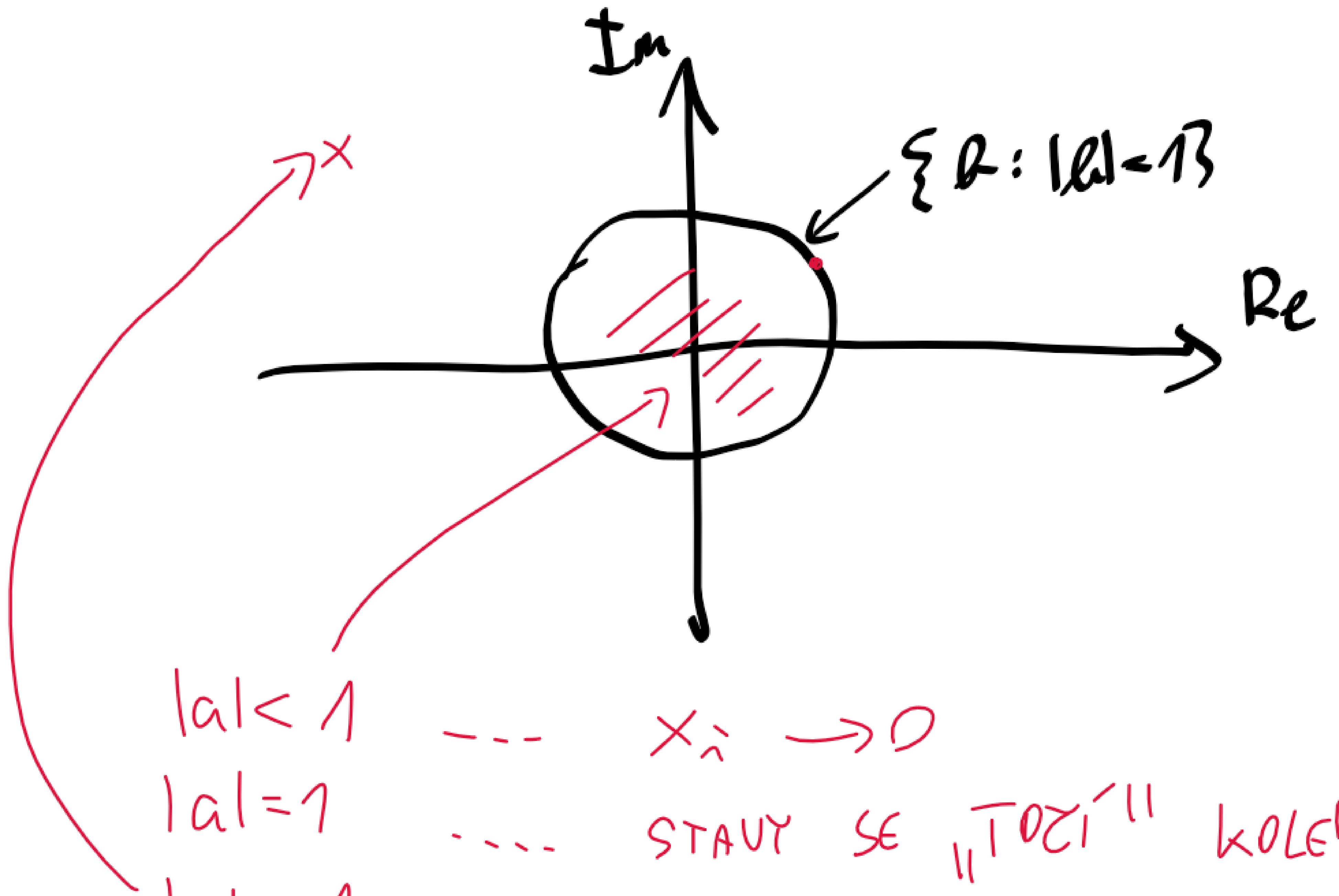
$a = 1$: $x_0, x_1, x_2, \dots$ KONSTANTNÍ

- PŘ: $T=\mathbb{C}$, $V=\mathbb{C}$, $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $x\mapsto a\cdot x$, $a\in\mathbb{C}$





- JAK SE NÁSOBÍ A MOCNÍ KOMPLEXNÍ ČÍSLA?



$|a|<1$ ... $x_n \to 0$

$|a|=1$ ... STAVY SE „TOČÍ" KOLEM POČÁTKU

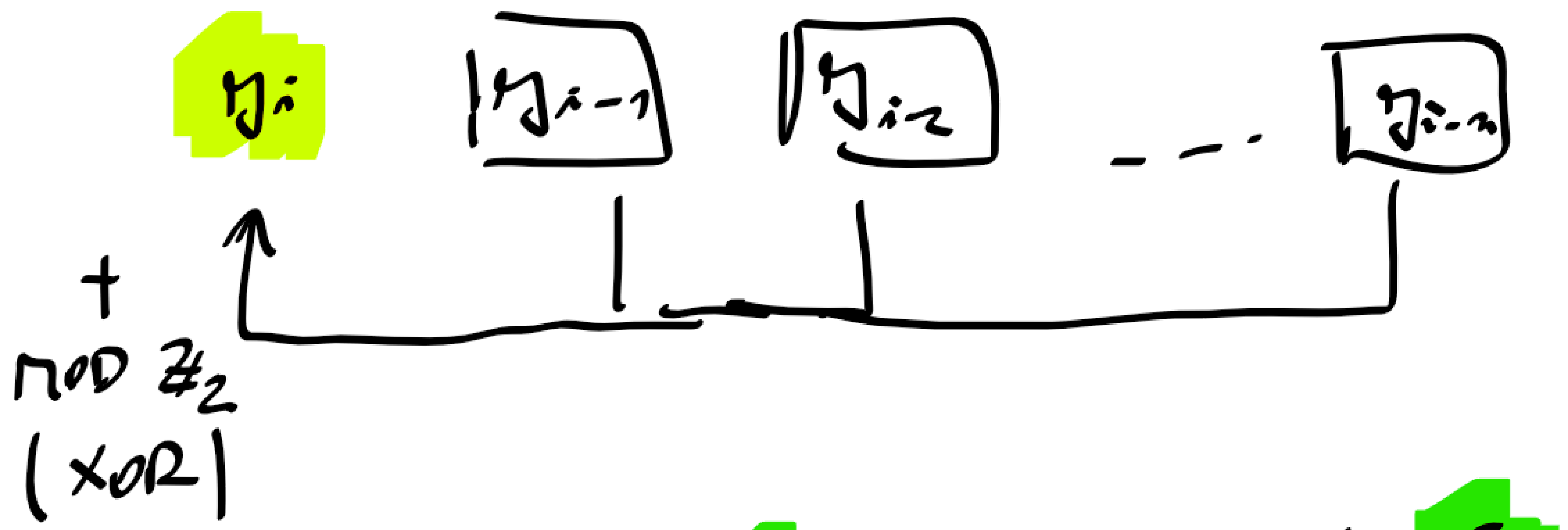
$|a|>1$ ... $|x_n| \to \infty$

- $\arg(a^2) = 2\cdot\arg(a)$ (AŽ NA NÁSOBEK 2π)
- $|a^2| = |a|^2$

- **PŘ:** TZV. POSUVNÝ REGISTR (ANGL. LFSR = LINEAR FEEDBACK SHIFT REGISTER)

$T = \mathbb{Z}_2$ $\qquad y_0, y_1, y_2, \ldots \in \mathbb{Z}_2$ (POSLOUPNOST BITŮ)

$n \geq 1$



$$y_i := a_1 y_{i-1} + \cdots + a_n y_{i-n}$$

$V = \mathbb{Z}_2^n$, $\quad x_i = \begin{pmatrix} y_i \\ y_{i+1} \\ \vdots \\ y_{i+n-1} \end{pmatrix}$, $\quad x_0, x_1, x_2, \ldots \in \mathbb{Z}_2^n$

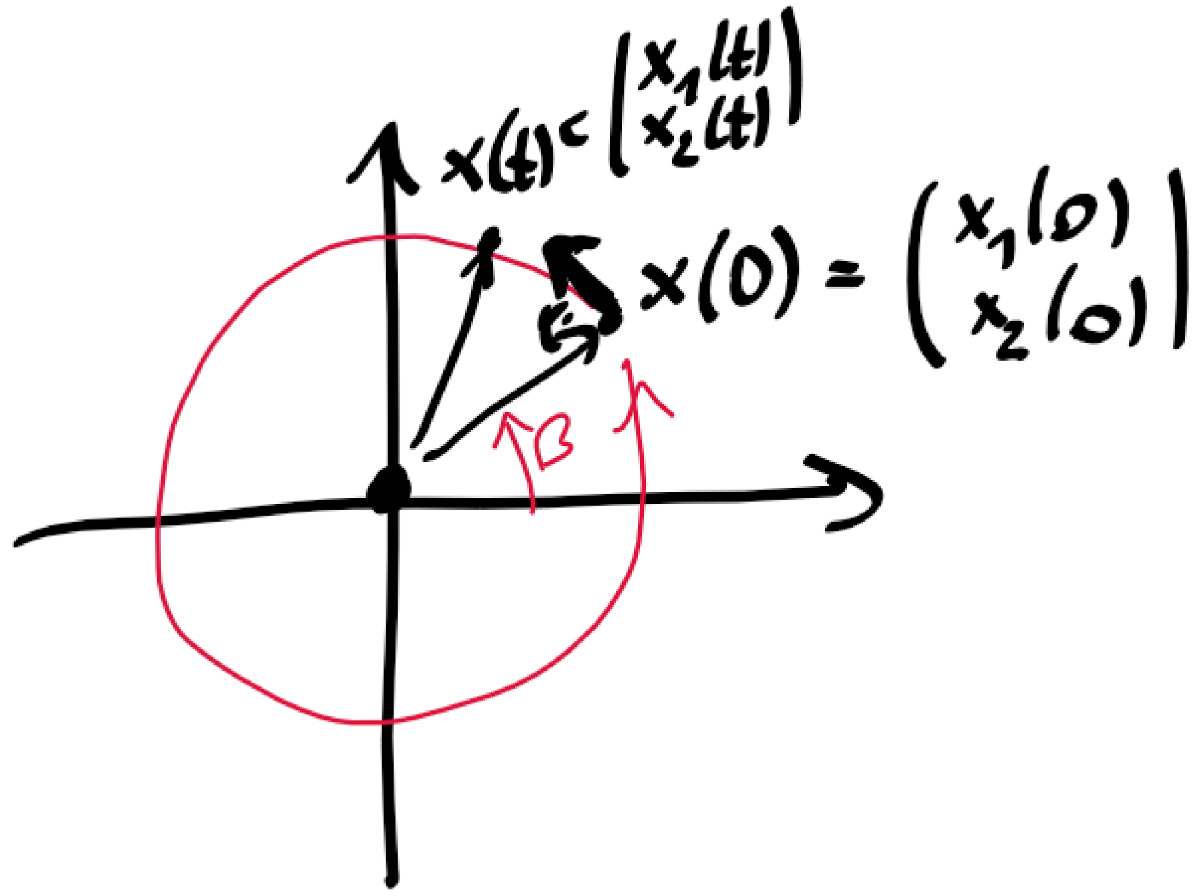
- <u>POZOROVÁNÍ</u>:

$$x_{i+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \cdots & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & & a_n \end{pmatrix}}_{A} \cdot x_i \qquad \Big|\ f_A : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2^n$$

$$\begin{pmatrix} y_{i+1} \\ y_{i+2} \\ \vdots \\ y_{i+n} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} y_i \\ y_{i+1} \\ \vdots \\ y_{i+n-1} \end{pmatrix}$$

– SPOJITÉ LINEÁRNÍ DYNAMICKÉ SYSTÉMY , $T = \mathbb{R}$ NEBO $\mathbb{C}$, $V = T^n$

– PŘ:



DOSTANEME:

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos(t+\beta) \\ \sin(t+\beta) \end{pmatrix}$$

$t \in \mathbb{R}$

$$x'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{MATICE OTOČENÍ}} x(t)$$

90°

$$x : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & V \\ t & \longmapsto & x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

• $T = \mathbb{R}$:

$$x : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = x(t) \end{array}$$

, PO SLOŽKÁCH: $x_i : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & x_i(t) \end{array}$

CHCEME, ABY MĚLA DERIVACE

$$x'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}$$

VÝVOJ SYSTÉMU: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, POŽADUJEME $\forall t$: $x'(t) = A \cdot x(t)$, $x(0) = \theta$ POČÁTEČNÍ STAV

• $x'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \rightsquigarrow x(t+h) \approx x(t) + h \cdot x'(t) = x(t) + h \cdot A \cdot x(t) = (I_n + h \cdot A) \cdot x(t)$

- $\underline{T = \mathbb{C}}$:

$$x'(t) = A \cdot x(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad A \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) + i y_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) + i y_n(t) \end{pmatrix}, \quad x_k, y_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

POŽADUJEME DERIVACI $\forall t \in \mathbb{R}$

$$x'(t) := \begin{pmatrix} x_1'(t) + i y_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) + i y_n'(t) \end{pmatrix}$$

- PŘ: $n=1$, $T=\mathbb{R}$ $\qquad x: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

SYSTÉM JE DÁN TÍMTO

- POČÁTEČNÍ STAV: $x(0) = b \in \mathbb{R}$
- DIF. ROVNICE: $x'(t) = \underbrace{a}_{\in\mathbb{R}}\, x(t)$

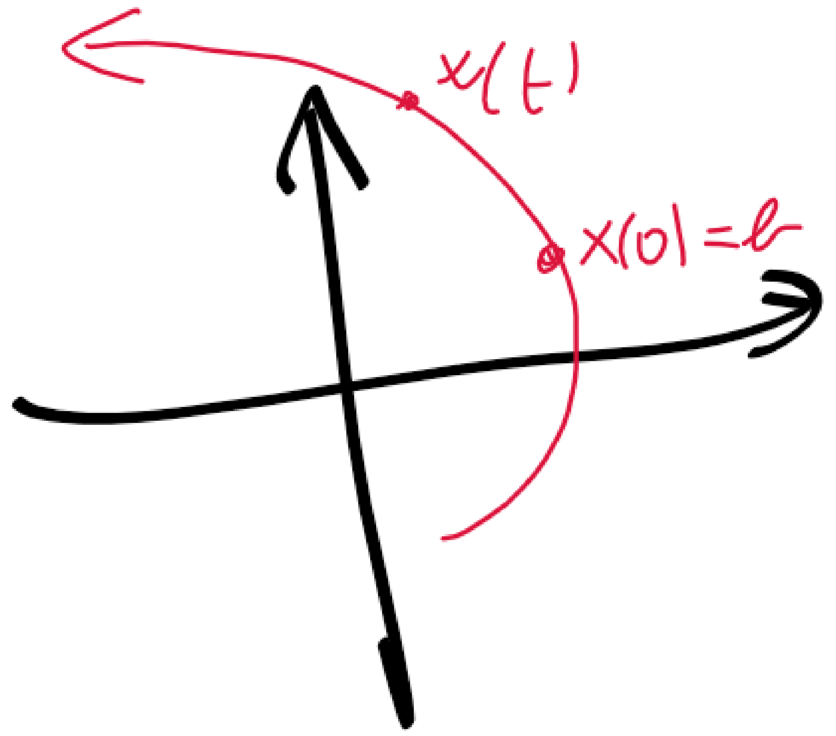
- Z ANALÝZY: TYTO PODMÍNKY SPLŇUJE FUKCE $x(t) = b\cdot e^{a\cdot t}$
A JE TO JEDINÁ TAKOVÁ FUNKCE

- PŘÍPADY:

$$\begin{cases} a<0 \;\ldots\; x(t)\to 0, & t\to\infty \\ a=0 \;\ldots\; x(t)=b & \forall t \quad \text{KONSTANTNÍ} \\ a>0 \;\ldots\; |x(t)|\to\infty, & t\to\infty \end{cases}$$

- PŘ: $n=1$, $T=\mathbb{C}$ ... $x(0) = b \in \mathbb{C}$ $\qquad x: \mathbb{R}\to\mathbb{C}$

$x'(t) = a\cdot x(t)$, $a\in\mathbb{C}$

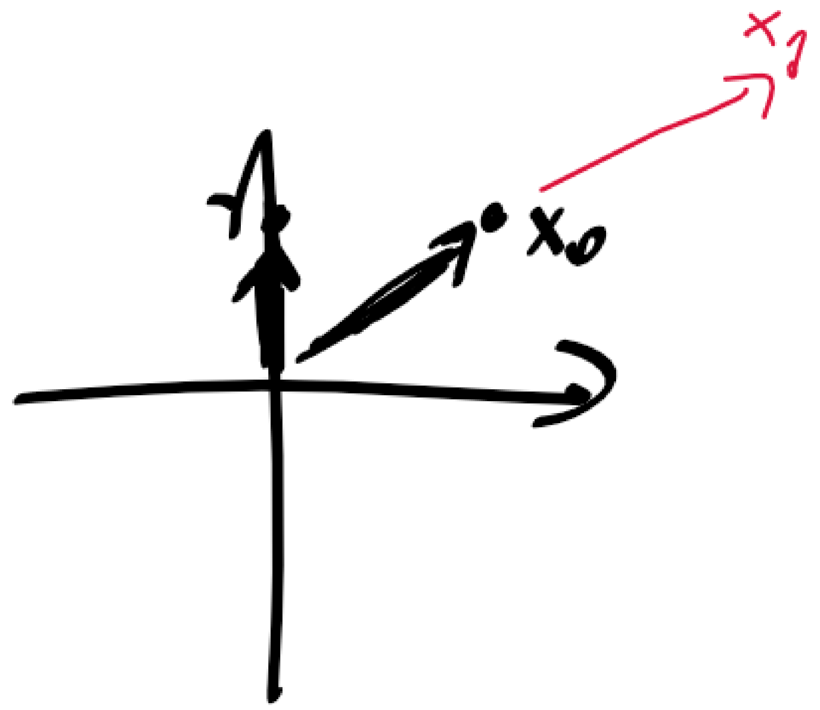


$$\Rightarrow \quad x(t) = b\cdot e^{a\cdot t} = \underbrace{b\cdot e^{t\cdot \mathrm{Re}\,a}}_{|x(t)| = |b|\cdot e^{t\cdot \mathrm{Re}\,a}}\cdot\left(\cos t\cdot \mathrm{Im}\,a + i \sin t\cdot \mathrm{Im}\,a\right)$$

$$e^{(u+iv)} = e^{u}\cdot e^{iv} = e^{u}\cdot(\cos v + i\sin v)$$

– ÚVOD + MOTIVACE K VLASTNÍM ČÍSLŮM A VEKTORŮM

– PŘ: UVAŽUJME DISKR. LIN. DYN. SYSTÉM NAD $\mathbb{R}$ DANÝ TĚMITO DATY:



- $V = \mathbb{R}^2$
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ DÁN MATICÍ $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

  (TJ. $x_{i+1} = A \cdot x_i$, $x_i = A^i \cdot x_0$)
- POČÁTEČNÍ STAV x_0 ... BUDEME STUDOVAT RŮZNÉ

– ZKUSÍME $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$x_1 = A \cdot x_0 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = A \cdot x_1 = A \cdot (3 \cdot x_0) = 9 \cdot x_0$$

$$\vdots$$

$$x_n = 3^n \cdot x_0 = \begin{pmatrix} 3^n \\ 3^n \end{pmatrix}$$

POINTA:

$$A \cdot x_0 = 3 \cdot x_0$$

VLASTNÍ VEKTOR (EIGENVECTOR)

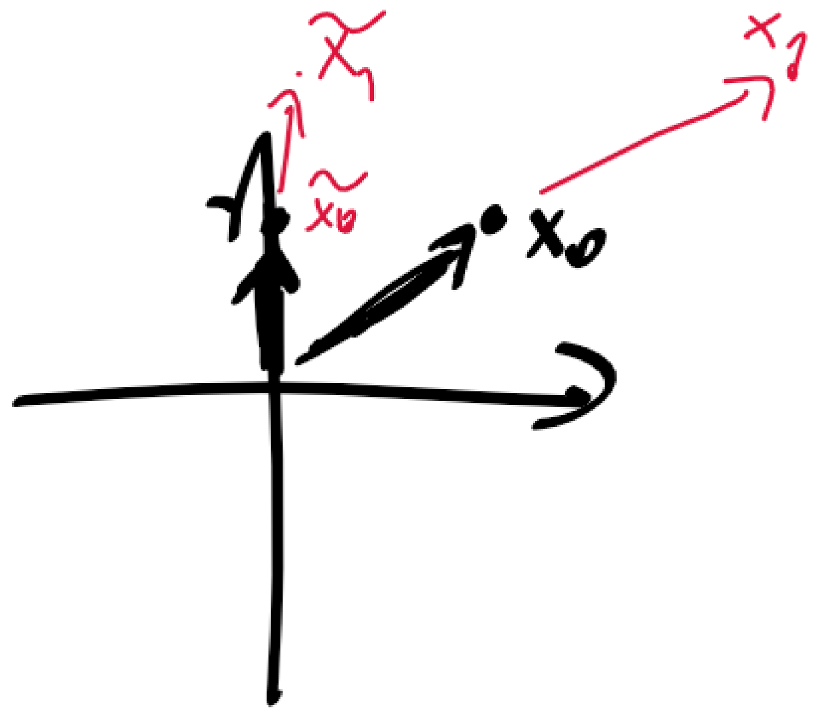
3 JE VLASTNÍ ČÍSLO A (EIGENVALUE)

– ZKUSÍME: $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$x_1 = A \cdot x_0 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot x_0$$

$$\rightsquigarrow x_n = 2^n \cdot x_0$$

– PŘ: UVAŽUJME DISKR. LIN. DYN. SYSTÉM NAD $\mathbb{R}$ DANÝ TĚMITO DATY:



- $V = \mathbb{R}^2$
- $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ DÁN MATICÍ $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

  (TJ. $x_{i+1} = A \cdot x_i$, $x_i = A^i \cdot x_0$)
- POČÁTEČNÍ STAV x_0 ... BUDEME STUDOVAT RŮZNÉ

– POKRAČOVÁNÍ: $\Rightarrow B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ JE BÁZE $\mathbb{R}^2$ Z VLASTNÍCH VETORŮ

– TEĎ KDYŽ $x_0 \in \mathbb{R}^2$ LIBOVOLNÝ

– VYJÁDŘÍME JEJ JAKO $x_0 = c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\rightsquigarrow \quad A^k x_0 = A^k \left(c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) =$$
$$= c \cdot A^k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + d \cdot A^k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= c \cdot 3^k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + d \cdot 2^k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow f_A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ MÁ VZHLEDEM K B A B MATICI $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$