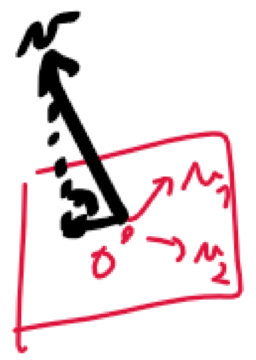
- DOKONČENÍ Z MINULA: ($T = \mathbb{R}$ NEBO $\mathbb{C}$)

- **T8.80**: BUĎ $(u_1, \ldots, u_k)$ POSLOUPNOST VEKTORŮ VE VEKTOROVÉM PROSTORU SE SKAL. SOUČINEM $\langle \cdot, \cdot \rangle$ A $B = (\langle u_i, u_j \rangle)_{k \times k}$ GRAMOVA MATICE. PAK:
  1) B JE REGULÁRNÍ $\Leftrightarrow$ $(u_1, \ldots, u_k)$ JE LN.
  2) B JE HERMITOVSKÁ.
  3) JE-LI $(u_1, \ldots, u_k)$ LN, PAK JE B POZITIVNĚ DEFINITNÍ.

- PŘIPOMENUTÍ:
  - **T8.76**: PRO $a_1, \ldots, a_k \in T$ A VEKTOR $v \in V$ JSOU NÁSLEDUJÍCÍ TVRZENÍ EKVIVALENTNÍ:



$\mathrm{LO}\{u_1, \ldots, u_k\}$

  1. $v = a_1 u_1 + \ldots + a_k u_k$ JE ORTOGONÁLNÍ PROJEKCE v DO $\mathrm{LO}\{u_1, \ldots, u_k\}$.
  2. $B \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle u_1, v \rangle \\ \vdots \\ \langle u_k, v \rangle \end{pmatrix}$

- **DK**: 1) - APLIKUJEME T8.76 NA $v = 0$

$$0 = a_1 u_1 + \ldots + a_k u_k \overset{T8.76}{\Longleftrightarrow} B \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} \in \ker B$$

- TJ. B JE REGULÁRNÍ $\Leftrightarrow$ $\ker B = \{0\}$ $\Leftrightarrow$ $(a_1 u_1 + \ldots + a_k u_k = 0 \Rightarrow \forall i: a_i = 0)$ $\Leftrightarrow$ $(u_1, \ldots, u_k)$ LN

2) - PLYNE Z ROVNOSTI: $\langle u_i, u_j \rangle = \overline{\langle u_j, u_i \rangle}$

3) - VEZMEME ORTONORMÁLNÍ BÁZI $C = \{v_1, \ldots, v_k\}$ PROSTORU $\mathrm{LO}\{u_1, \ldots, u_k\}$

- POLOŽME $A = \underbrace{\left([u_1]_C \middle| \ldots \middle| [u_k]_C \right)}_{k} \Big\} k$, PAK A JE REGULÁRNÍ, TJ. $B = A^* A$ JE POZITIVNĚ DEFINITNÍ (DISKUZE POD POZOROVÁNÍM 8.22) $\square$

– UNITÁRNÍ A ORTOGONÁLNÍ MATICE

– **DEF 8.81:** ČTVERCOVÁ MATICE NAD $\mathbb{R}$ SE NAZÝVÁ ORTOGONÁLNÍ, POKUD MÁ ORTONORMÁLNÍ POSLOUPNOST SLOUPCŮ VZHLEDEM KE STD. SKAL. SOUČINU.

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \,\big|\, a_2 \,\big|\, \cdots \,\big|\, a_n \end{pmatrix}}_{n} \Big\} m$$

ČTVERCOVÁ MATICE NAD $\mathbb{C}$ SE NAZÝVÁ UNITÁRNÍ, POKUD MÁ ——— || ———

– **PŘ:**

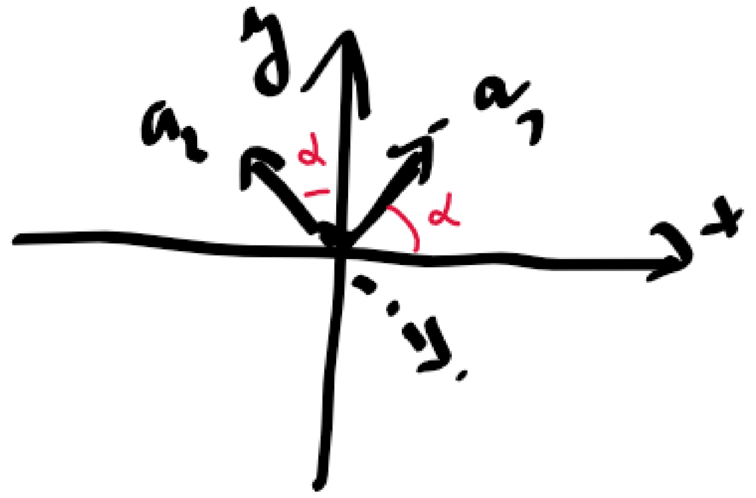
1) I_n JE UNITÁRNÍ (RESP. ORTOGONÁLNÍ)

2) $A = \begin{pmatrix} a_1 \,\big|\, \cdots \,\big|\, a_n \end{pmatrix}$ UNITÁRNÍ $\implies$ $\begin{pmatrix} a_{\pi(1)} \,\big|\, \cdots \,\big|\, a_{\pi(n)} \end{pmatrix}$ UNITÁRNÍ

$\pi \in S_n$

SPECIÁLNĚ PERMUTAČNÍ MATICE JSOU UNITÁRNÍ.

3) ORTOGONÁLNÍ MATICE ŘÁDU 2 NAD $\mathbb{R}$:



$$a_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} \rightsquigarrow A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\text{NEBO} \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{pmatrix} \rightsquigarrow A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \overset{\alpha=0}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

– **T8.82**: BUĎ Q ČTVERCOVÁ KOMPLEXNÍ MATICE ŘÁDU n. PAK NTJE:

(1) Q JE UNITÁRNÍ.

(2) $Q^* \cdot Q = I_n$.

(3) Q^* JE UNITÁRNÍ.

(4) $Q \cdot Q^* = I_n$.

(5) Q^T JE UNITÁRNÍ.

(6) $f_Q : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ ZACHOVÁVÁ STD. SKALÁRNÍ SOUČIN, TJ.

$\forall u, v \in \mathbb{C}^n : \quad f(u) \bullet f(v) = u \bullet v$.

SPECIÁLNĚ JE KAŽDÁ UNITÁRNÍ MATICE REGULÁRNÍ A $Q^{-1} = Q^*$.

– DK: (1) ⇔ (2), (3) ⇔ (4) PŘÍMO Z DEFINICE.

(2) ⇒ (4): (2) ⇒ Q MÁ LEVOU INVERZI Q^* ⇒ Q REGULÁRNÍ A $Q^{-1} = Q^*$

⇒ $Q \cdot Q^{-1} = Q \cdot Q^* = I_n$

(4) ⇒ (2): ANALOGICKÉ

$Q = \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \vdots \\ \tilde{u}_n \end{pmatrix}$

(3) ⇔ (5): (5) ŘÍKÁ, ŽE Q MÁ ORTONORMÁLNÍ POSLOUPNOST ŘÁDKŮ

(3) ŘÍKÁ, ŽE KDYŽ KOMPLEXNĚ SDRUŽÍME VŠECHNY PRVKY Q, PAK DOSTANEME ORTONORMÁLNÍ POSLOUPNOST ŘÁDKŮ

POVŠIMNĚME: $\tilde{u}_i^T \cdot \tilde{u}_j^T = \sum_{k=1}^{n} \overline{u_{ik}}\, u_{jk} = \sum_{k=1}^{n} u_{ik}\, \overline{u_{jk}} = \begin{pmatrix} \overline{u_{i1}} \\ \vdots \\ \overline{u_{in}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{u_{j1}} \\ \vdots \\ \overline{u_{jn}} \end{pmatrix}$

V TVRZ. (3)

V TVRZ. (5)

- **T8.82:** BUĎ Q ČTVERCOVÁ KOMPLEXNÍ MATICE ŘÁDU n. PAK NTJE:

(1) Q JE UNITÁRNÍ.

(2) $Q^* \cdot Q = I_n$.

(3) Q^* JE UNITÁRNÍ.

(4) $Q \cdot Q^* = I_n$.

(5) Q^T JE UNITÁRNÍ.

(6) $f_Q : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ ZACHOVÁVÁ STD. SKALÁRNÍ SOUČIN, TJ.

$\forall u, v \in \mathbb{C}^n : \quad f(u) \cdot f(v) = u \cdot v$.

SPECIÁLNĚ JE KAŽDÁ UNITÁRNÍ MATICE REGULÁRNÍ A $Q^{-1} = Q^*$.

- **DK - POKRAČOVÁNÍ:**

(2) ⟹ (6): PŘEDP. (2), UVAŽUJME $u, v \in \mathbb{C}^n$. PAK

$$f_Q(u) \cdot f_Q(v) = (Qu) \cdot (Qv) = (Qu)^*(Qv) = u^*\underbrace{(Q^*Q)}_{I_n}v = u^*v = u \cdot v$$

(6) ⟹ (1): $Q = \left(f_Q(e_1) \middle| \dots \middle| f_Q(e_n) \right) \Rightarrow \left(f_Q(e_1), \dots, f_Q(e_n) \right)$ ORTONORMÁLNÍ

$\Rightarrow Q$ JE UNITÁRNÍ.

- **DŮSL. 8.85:** SOUČIN UNITÁRNÍCH MATIC STEJNÉHO ŘÁDU JE UNITÁRNÍ MATICE.

  - **DK:** A, B UNITÁRNÍ STEJNÉHO ŘÁDU, PAK

$$(AB)^*(AB) = B^*\underbrace{(A^*A)}_{I_n}B = B^*B = I_n \implies AB \text{ UNITÁRNÍ}$$

- **T 8.86:** JE-LI A REGULÁRNÍ KOMPLEXNÍ MATICE A $Q_1R_1 = A = Q_2R_2$ JSOU 2 QR ROZKLADY, PAK NUTNĚ $Q_1 = Q_2$ A $R_1 = R_2$.

UNITÁRNÍ

$$\begin{pmatrix} >0 & & ? \\ & \ddots & \\ 0 & & >0 \end{pmatrix}$$

- **DK:** $Q_1R_1 = Q_2R_2 \implies \underbrace{Q_2^*Q_1 = Q_2^{-1}Q_1}_{\text{UNITÁRNÍ}} = \underbrace{R_2R_1^{-1}}_{\begin{pmatrix} >0 & & ? \\ & \ddots & \\ 0 & & >0 \end{pmatrix}} =: (c_1|\dots|c_n)$

  - CHCEME UKÁZAT, ŽE $c_i = e_i \ \forall i$
  - UKÁŽEME $c_i = e_i$ INDUKCÍ PODLE $i = 1, \dots, n$:

    $i=1$: $\|c_1\| = 1$ & $c_1 = \begin{pmatrix} >0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \implies c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_1$

    $i>1$: PŘEDPOKLÁDÁME: $c_1 = e_1, \dots, c_{i-1} = e_{i-1}$

    $\implies c_i \perp \{e_1, \dots, e_{i-1}\}$, $c_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ >0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$, $\|c_i\| = 1 \implies c_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i = e_i$ $\square$

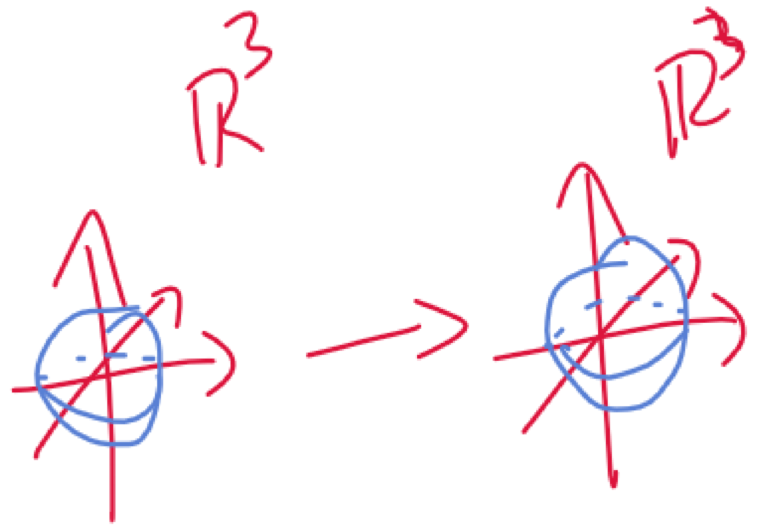
- UNITÁRNÍ ZOBRAZENÍ

- **DEF 8.87:** BUĎ V KOMPLEXNÍ V.P. SE $\langle -,- \rangle_V$ A
  W — " — $\langle -,- \rangle_W$.

  PAK LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ $f: V \to W$ SE NAZÝVÁ UNITÁRNÍ, POKUD

$$\forall u, v \in V : \quad \langle f(u), f(v) \rangle_W = \langle u, v \rangle_V .$$

- **T 8.88:** BUĎ $f: V \to W$ LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ, V, W KOMPLEXNÍ V.P. SE SKAL.SOUČINEM. PAK NTJE:



1. f JE UNITÁRNÍ.
2. $\forall u \in V: \quad \|f(u)\|_W = \|u\|_V$ (f ZACHOVÁVÁ NORMU)
3. f ZOBRAZÍ KAŽDOU ORTONORM. POSL. $(u_1, \dots, u_k)$ NA ORTONORM. POSL. $(f(u_1), \dots, f(u_k))$.
4. f ZOBRAZUJE JEDNOTKOVÉ VEKTORY NA JEDNOTKOVÉ VEKTORY
   $(\|u\|_V = 1 \Rightarrow \|f(u)\|_W = 1)$

SPECIÁLNĚ: KAŽDÉ UNITÁRNÍ ZOBRAZENÍ JE PROSTÉ.

- **T8.88**: BUĎ $f: V \to W$ LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ, V, W KOMPLEXNÍ V.P. SE SKAL. SOUČINEM. PAK NTJE:

(1) f JE UNITÁRNÍ.

(2) $\forall u \in V: \quad \|f(u)\|_W = \|u\|_V$ (f ZACHOVÁVÁ NORMU)

(3) f ZOBRAZÍ KAŽDOU ORTONORM. POSL. $(u_1, \dots, u_k)$ NA ORTONORM. POSL. $(f(u_1), \dots, f(u_k))$.

(4) f ZOBRAZUJE JEDNOTKOVÉ VEKTORY NA JEDNOTKOVÉ VEKTORY ($\|u\|_V = 1 \Rightarrow \|f(u)\|_W = 1$)

SPECIÁLNĚ: KAŽDÉ UNITÁRNÍ ZOBRAZENÍ JE PROSTÉ.

- POZNÁMKY K DŮKAZU:

  - DODATEK PLYNE Z PODMÍNKY (2) & f PROSTÉ $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{0\}$.

(1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (4) (1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) JEDNODUCHÉ.

(4) $\Rightarrow$ (2): $0 \neq v \in V$, PAK $v = t u$ PRO $t = \|v\|_V > 0$, $u = \frac{v}{\|v\|} \leftarrow$ JEDNOTKOVÝ

$$\|f(v)\|_W = \|f(tu)\|_W = \|t \cdot f(u)\|_W = t \cdot \underbrace{\|f(u)\|_W}_{1 \text{ ze } (4)} = t = \|v\|_V$$

(2) $\Rightarrow$ (1): POLARIZAČNÍ IDENTITY, T8.32: $\operatorname{Re}\langle u, v\rangle = \frac{1}{2}(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2)$

CVIČ. 7, STR 325 $\quad \operatorname{Im}\langle u, v\rangle = \frac{1}{2}(\|u - iv\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2)$.

- PŘIBLIŽNÉ ŘEŠENÍ SLR METODOU NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

- DEF 8.90: VEKTOR $c \in \mathbb{C}^n (\mathbb{R}^n)$ JE PŘIBLIŽNÉ ŘEŠENÍ SLR $Ax = b$ METODOU NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ, POKUD

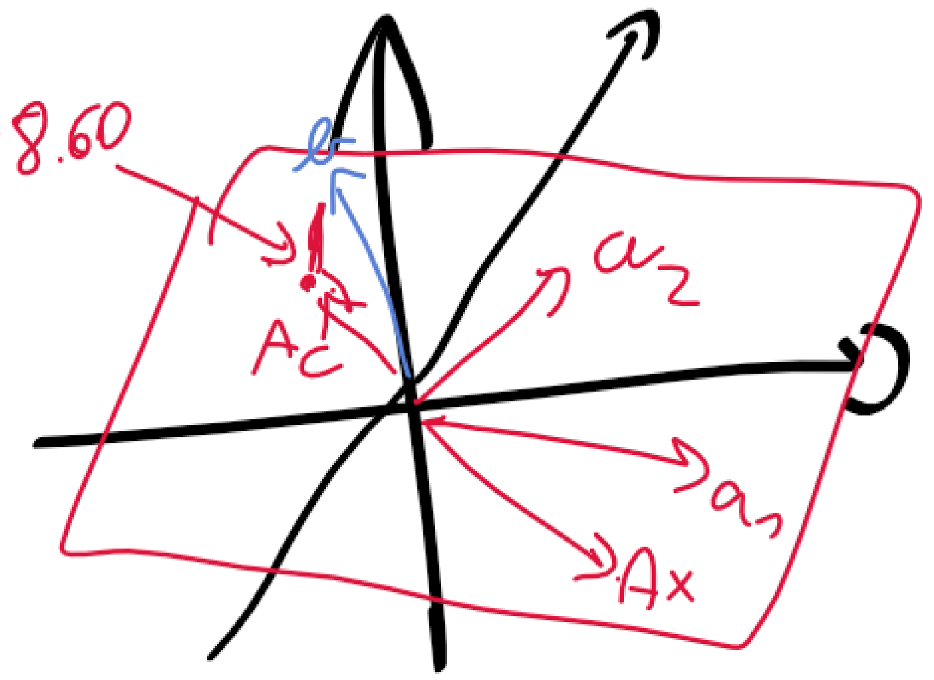
$$\|Ac - b\| \leq \{\|Ax - b\| : x \in \mathbb{C}^n\}$$

(c JE ORTOG. PROJEKCE b DO Im A)

- PŘ:

$$3\left\{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix}\right. \cdot x = \begin{pmatrix} b \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\quad}_{2}$$



- T 8.91: c JE PŘIBLIŽNÉ ŘEŠENÍ $Ax = b$ METODOU NEJM. ČTV, PRÁVĚ KDYŽ

$$\underbrace{A^*A \cdot x = A^*b}_{\text{DEF 8.92: SOUSTAVA NORMÁLNÍCH ROVNIC K } Ax=b}$$

- KVÍZ 2, OTÁZKA 2: $B = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2} \right)$ ORTONORM. BÁZE $\mathbb{R}^2$ SE $\langle -,- \rangle$

$$\Big\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}}_{u_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u_2} \Big\rangle \overset{8.49}{=} [u_1]_B \cdot [u_2]_B = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2$$

$$u_1 = -2 \cdot v_1 + 5 \cdot v_2$$

$$u_2 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2$$

$$\langle u_1, u_2 \rangle = \langle -2v_1 + 5v_2, v_1 \rangle =$$

$$= -2 \underbrace{\langle v_1, v_1 \rangle}_{1} + 5 \underbrace{\langle v_2, v_1 \rangle}_{0} = -2 \cdot 1 = -2$$