ORTOGONÁLNÍ DOPLNĚK, GRAMOVA MATICE

• ORTOGONÁLNÍ DOPLNĚK

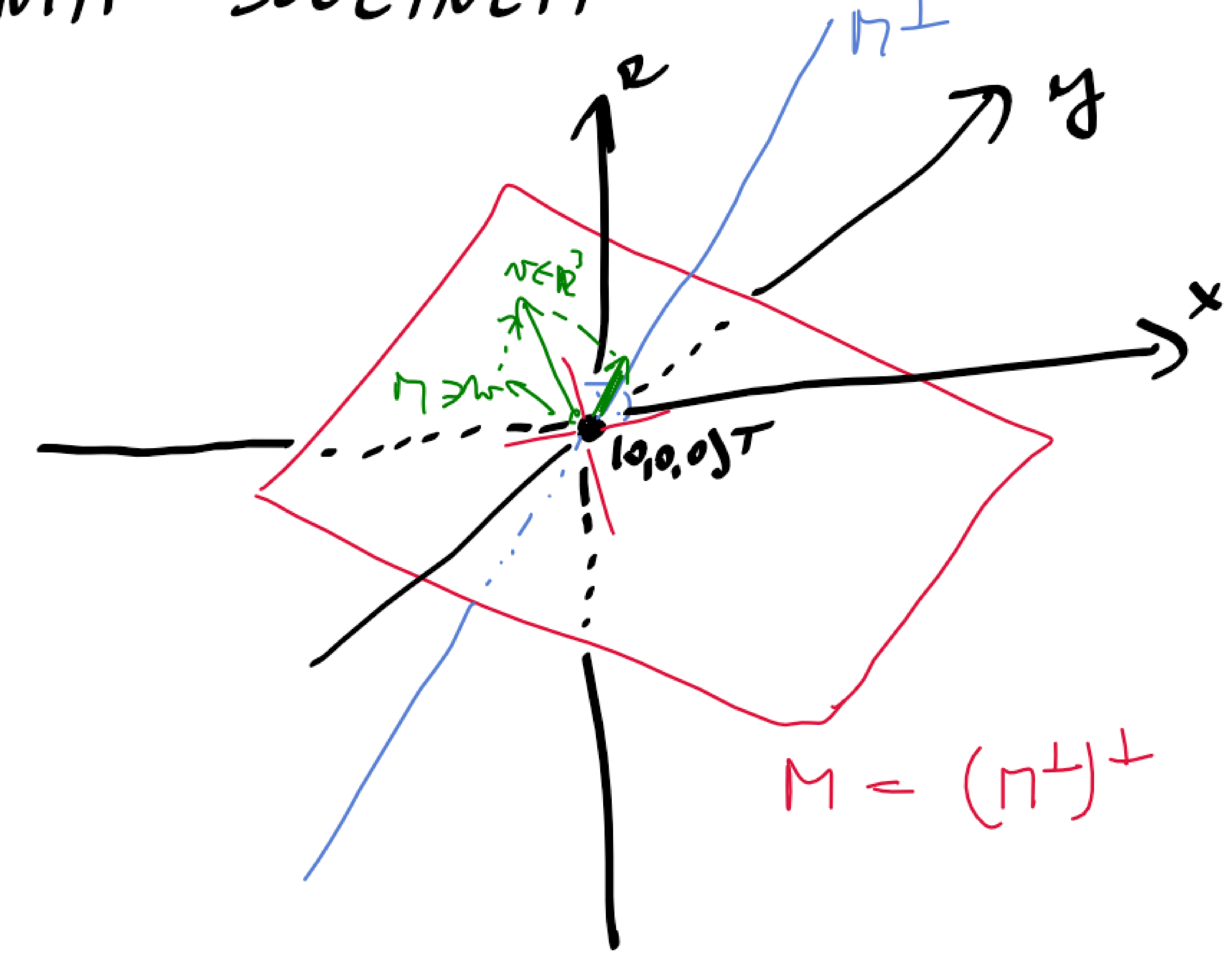
• BUĎ V V.P. SE $\langle -,- \rangle$ NAD $T = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

– **DEF**: JE-LI $M \subseteq V$ MNOŽINA VEKTORŮ, PAK ORTOGONÁLNÍM DOPLŇKEM K M VE V ROZUMÍME

$$M^\perp = \{ v \in V : v \perp M \} = \{ v \in V : (\forall m \in M : \langle v, m \rangle = 0) \}.$$

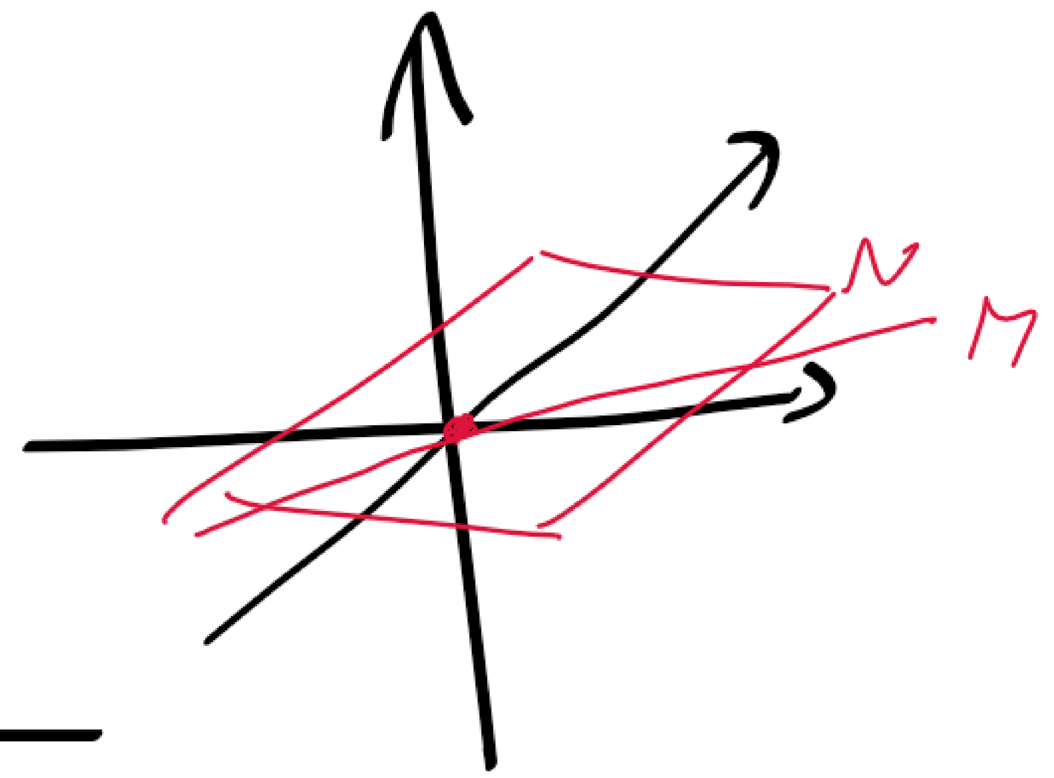
– POZN: $M \perp (M^\perp)$ A $M^\perp$ JE NEJVĚTŠÍ TAKOVÁ MNOŽINA VZHLEDEM K INKLUZI.

– PŘ: $V = \mathbb{R}^3$ SE STD. SKALÁRNÍM SOUČINEM



$$\mathbb{R}^3 = M \oplus M^\perp$$

- T8.54: V v.p. se $\langle -,- \rangle$, $M \subseteq V$. Pak



(1) $M^\perp = (\mathrm{LO}\,M)^\perp$

(2) $M^\perp$ je podprostor V.

(3) $M \subseteq N \Rightarrow N^\perp \subseteq M^\perp$

- Dk: (1) $v \in M^\perp \iff v \perp M \overset{T8.52}{\iff} v \perp \mathrm{LO}\,M \iff v \in (\mathrm{LO}\,M)^\perp$

(2) Vezmeme $w_1, w_2 \in M^\perp$ a $t \in T$ $(= \mathbb{R}, \mathbb{C})$

Pak $\forall v \in M$: $\langle v, w_1 + w_2 \rangle \overset{(SL2)}{=} \langle v, w_1 \rangle + \langle v, w_2 \rangle = 0 + 0 = 0$

$\langle v, t \cdot w_1 \rangle = t \cdot \langle v, w_1 \rangle = t \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow w_1 + w_2, \; t \cdot w_1 \in M^\perp$

(3) Ať $M \subseteq N$ $(\subseteq V)$. Pak

$v \in N^\perp \iff v \perp N \Rightarrow v \perp M \iff v \in M^\perp$

- ORTOGÁLNÍ DOPLNĚK KE KONEČNĚ GENEROVANÉMU PODPROSTORU:

- **V8.74:** BUĎ V V.P. SE $\langle\cdot,\cdot\rangle$ NAD $\mathbb{R}$ NEBO $\mathbb{C}$. BUĎ $W \subseteq V$ KONEČNĚ GENEROVANÝ. PAK PLATÍ:

  1. $V = W \oplus W^\perp$.
  2. $(W^\perp)^\perp = W$.
  3. KAŽDÝ VEKTOR $v \in V$ MÁ (JEDNOZNAČNOU) ORTOGONÁLNÍ PROJEKCI JAK NA W, TAK NA $W^\perp$.
  4. JE-LI V KONEČNĚ GENEROVANÝ DIMENZE n, PAK $n = \dim W + \dim W^\perp$

- **DK:** 1 • $W \cap W^\perp = \{0\}$ .... ✓

• $W + W^\perp = V$ .... POUŽIJEME ORTOGONÁLNÍ PROJEKCI NA W (EXISTUJE) JE-LI $v \in V$, PAK MÁME $v = \underbrace{w}_{\in W} + \underbrace{(v-w)}_{\in W^\perp}$

2 • $W \subseteq (W^\perp)^\perp$ ..... JE-LI $w \in W$, PAK $w \perp (W^\perp)$, TJ. $w \in (W^\perp)^\perp$

• $(W^\perp)^\perp \subseteq W$ ..... VEZMĚME $v \in (W^\perp)^\perp$. CHCEME DOKÁZAT, ŽE $v \in W$.
UVAŽUJEME ORTOGONÁLNÍ PROJEKCI v NA W:

$$\underbrace{v}_{\in (W^\perp)^\perp} = \underbrace{w}_{\in W} + \underbrace{(v-w)}_{\in W^\perp}$$

, ALE ZÁROVEŇ $v - w \in (W^\perp)^\perp$ ($v \in (W^\perp)^\perp$, $w \in W \subseteq (W^\perp)^\perp$)

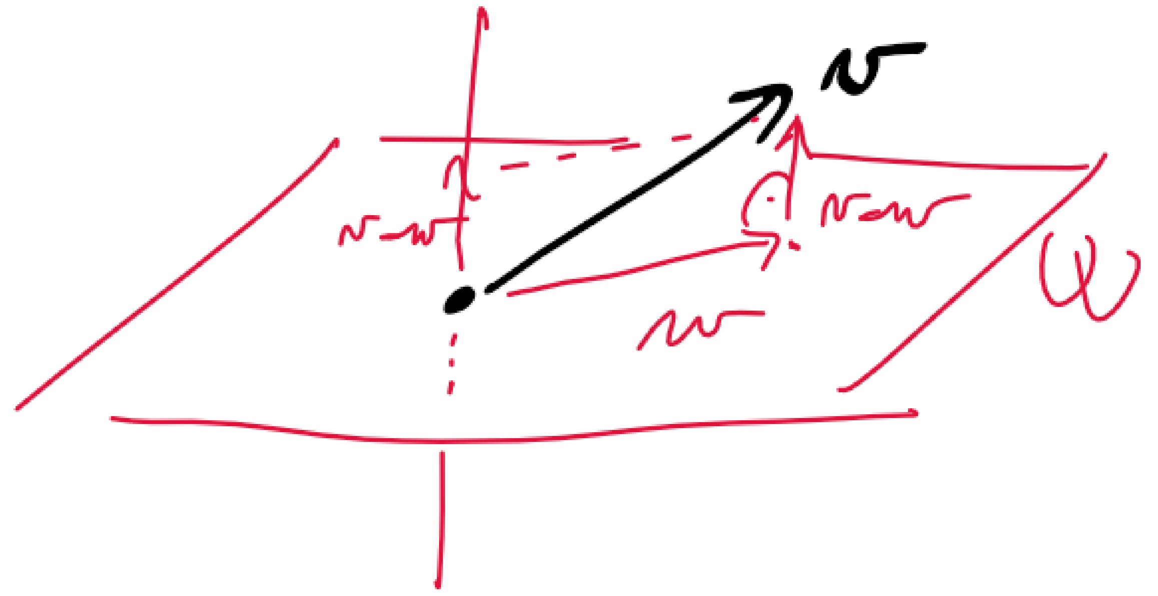
$\Rightarrow (v-w) \perp (v-w)$
$\Rightarrow v - w = 0$
$\Rightarrow v = w \in W$

– V8.74: BUĎ V V.P. SE $\langle -,- \rangle$ NAD $\mathbb{R}$ NEBO $\mathbb{C}$. BUĎ $W \subseteq V$ KONEČNĚ GENEROVANÝ. PAK PLATÍ:

1. $V = W \oplus W^\perp$.
2. $(W^\perp)^\perp = W$.
3. KAŽDÝ VEKTOR $v \in V$ MÁ (JEDNOZNAČNOU) ORTOGONÁLNÍ PROJEKCI JAK NA W, TAK NA $W^\perp$.
4. JE-LI V KONEČNĚ GENEROVANÝ DIMENZE n, PAK
$$n = \dim W + \dim W^\perp$$

– Dk (POKRAČOVÁNÍ):

3 – VÍME, ŽE ORTOGONÁLNÍ PROJEKCE NA W EXISTUJE



- JE-LI TEDY $v \in V$, PAK MŮŽEME PSÁT
$$v = \underset{\substack{\cap \\ W=(W^\perp)^\perp}}{w} + \underset{\substack{\cap \\ W^\perp}}{(v-w)} = \underset{\substack{\cap \\ W^\perp}}{(v-w)} + \underset{\substack{\cap \\ (W^\perp)^\perp}}{w}$$

Z DEFINICE ORTOGONÁLNÍ PROJEKCE v NA $W^\perp$

---

4 POUŽIJEME 1 A VĚTU 5.103 (O DIMENZI SOUČTU A PRŮNIKU PODPROSTORŮ)

– INTERPRETACE V 8.74 PRO $V = \mathbb{R}^n$ NEBO $\mathbb{C}^n$ A STD. SKALÁRNÍ SOUČIN:

– VEZMĚME MATICI TYPU $m \times n$ NAD $T = \mathbb{R}$ NEBO $\mathbb{C}$:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \vdots \\ \tilde{a}_m \end{pmatrix}}_{n} \Big\} m$$

– PAK $\ker A = \{ x \in T^n : \forall i \in \{1, \dots, m\} : \tilde{a}_i x = 0 \}$

$$= \{ x \in T^n : \forall i : \tilde{a}_i^* \cdot x = 0 \}$$

$$= \{ \tilde{a}_1^*, \dots, \tilde{a}_m^* \}^\perp = (\operatorname{Im} A^*)^\perp$$

– PODOBNĚ $\operatorname{Im} A^* = ((\operatorname{Im} A^*)^\perp)^\perp = (\ker A)^\perp$, NAVÍC $T^n = \ker A \oplus \operatorname{Im} A^*$

(TJ. NAD $\mathbb{R}$: $\mathbb{R}^n = \ker A \oplus \operatorname{Im} A^T$)

– PODOBNĚ: $(\operatorname{Im} A)^\perp = (\ker A^*)$ A $\operatorname{Im} A = (\ker A^*)^\perp$ A $\operatorname{Im} A \oplus \ker A^* = \mathbb{C}^m$

GRAMOVA MATICE

– **DEF 8.78:** V V.P. SE $\langle -,- \rangle$ NAD $\mathbb{R}$ NEBO $\mathbb{C}$.
BUĎ $(u_1, \dots, u_k)$ POSLOUPNOST VEKTORŮ.
PAK GRAMOVU MATICI POSLOUPNOSTI $(u_1, \dots, u_k)$ DEFINUJEME JAKO

$$B := \begin{pmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \langle u_1, u_2 \rangle & \dots \\ \langle u_2, u_1 \rangle & \langle u_2, u_2 \rangle & \dots \\ \vdots & \vdots & \\ \langle u_k, u_1 \rangle & \langle u_k, u_2 \rangle & \dots \end{pmatrix} = \left(\langle u_i, u_j \rangle \right)_{k \times k}$$

– **MATICOVÝ ZÁPIS:**

1. $V = \mathbb{R}^n$ NEBO $\mathbb{C}^n$ SE STD. SKAL. SOUČINEM?

$$A := \left.\underbrace{\left(u_1 \middle| u_2 \middle| \dots \middle| u_k \right)}_{k}\right\} n \quad \rightsquigarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ \vdots \\ u_k^* \end{pmatrix}}_{A^*} \cdot \underbrace{\left(u_1 \middle| \dots \middle| u_k \right)}_{A} = B$$

GRAMOVA MATICE

TJ. $B = A^* A$ (V REÁLNÉM PŘÍPADĚ $B = A^T \cdot A$)

① $V = \mathbb{R}^n$ NEBO $\mathbb{C}^n$ SE STD. SKAL. SOUČINEM?

$$A := \underbrace{\left(u_1 \middle| u_2 \middle| \ldots \middle| u_k\right)}_{k} \Big\}\, n \quad \rightsquigarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} u_1^* \\ \hline u_2^* \\ \hline \vdots \\ \hline u_k^* \end{pmatrix}}_{A^*} \cdot \underbrace{\left(u_1 \middle| \ldots \middle| u_k\right)}_{A} = B$$

GRAMOVA MATICE

TJ. $B = A^* A$ (V REÁLNÉM PŘÍPADĚ $B = A^T \cdot A$)

---

② BUĎ V OBECNÝ KON. GEN. V.P. SE $\langle -,- \rangle$, UVAŽUJME ORTONORMÁLNÍ BÁZI $C = (v_1, \ldots, v_n)$.

MÁME-LI POSLOUPNOST VEKTORŮ $(u_1, \ldots, u_k)$, MŮŽEME POLOŽIT

$$A = \underbrace{\left([u_1]_C \middle| \ldots \middle| [u_k]_C\right)}_{k} \Big\}\, n \quad \rightsquigarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} [u_1]_C^* \\ \hline \vdots \\ \hline [u_k]_C^* \end{pmatrix}}_{A^*} \underbrace{\left([u_1]_C \middle| \ldots \middle| [u_k]_C\right)}_{A} = B$$

GRAMOVA MATICE

$\rightsquigarrow B = A^* \cdot A$

$$[u_i]_C^* [u_j]_C \overset{T8.49}{=} \langle u_i, u_j \rangle$$

- Pomocí Gramovy matice můžeme charakterizovat ortogonální projekci $v \in V$ na $W := LO\{u_1, \dots, u_k\}$:

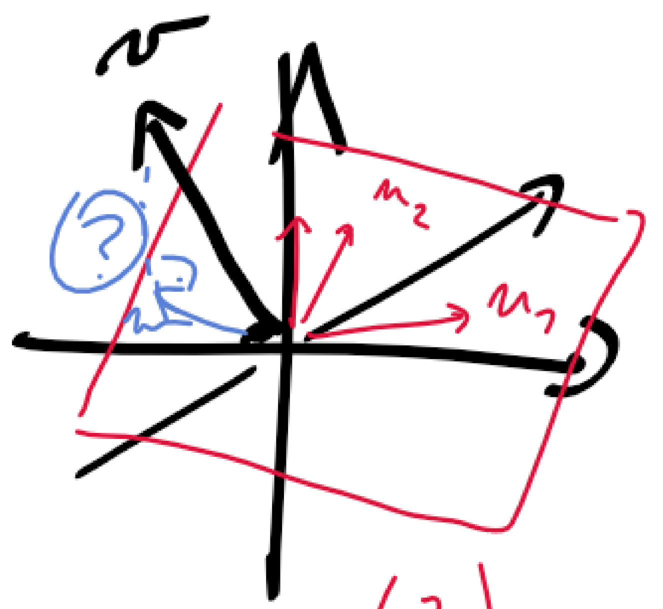
- **T8.76**: V v.p. se $\langle -, - \rangle$, $(u_1, \dots, u_k)$ posloupnost vektorů V, B Gramova matice.
Vezměme $v \in V$ a $w = a_1 u_1 + \dots + a_k u_k \in W := LO\{u_1, \dots, u_k\}$.
Pak NPJE:

(1) w je ortogonální projekce v na W.

(2) $$B \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle u_1, v \rangle \\ \vdots \\ \langle u_k, v \rangle \end{pmatrix}.$$

řádu k

V



$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow w = a_1 u_1 + a_2 u_2$ je ortogonální projekce v na $LO\{u_1, u_2\}$

- **Dk**: (1) $\iff$ $v - w \perp W$ $\iff$

$\forall i \in \{1, \dots, k\}: u_i \perp v - w$ $\iff$

$\forall i \in \{1, \dots, k\}: \langle u_i, v - w \rangle = 0$ $\iff$

$\forall i \in \{1, \dots, k\}: \langle u_i, w \rangle = \langle u_i, v \rangle$ $\iff$

$\forall i: \langle u_i, a_1 u_1 + \dots + a_k u_k \rangle = \langle u_i, v \rangle$ $\iff$

$\forall i: \langle u_i, u_1 \rangle \cdot a_1 + \langle u_i, u_2 \rangle \cdot a_2 + \dots + \langle u_i, u_k \rangle \cdot a_k = \langle u_i, v \rangle$ $\iff$ (2)

- **T8.76:** V v.p. se $\langle -,- \rangle$, $(u_1,\dots,u_k)$ posloupnost vektorů V, B Gramova matice.
Vezměme $v \in V$ a $w = a_1u_1 + \dots + a_k u_k \in W := LO\{u_1,\dots,u_k\}$
Pak NPJE:
  1. w je ortogonální projekce v na W.
  2. $$B \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle u_1, v\rangle \\ \vdots \\ \langle u_k, v\rangle \end{pmatrix}.$$

- Co se stane, pokud $V = \mathbb{R}^n$ nebo $\mathbb{C}^n$ se std. skal. součinem

A $$A = \underbrace{\left(u_1 \middle| \dots \middle| u_k\right)}_{k} \Big\}\, n \quad ?$$

- **Důsl 8.79:** Buď A matice typu $n \times k$ nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$.
Buď $v \in \mathbb{R}^n$ nebo $\mathbb{C}^n$ a $x \in \mathbb{C}^k$ nebo $\mathbb{R}^k$. Pak NPJE:
  1. $A \cdot x$ je ortogonální projekce v na $\operatorname{Im} A$
  2. $$\underbrace{A^*A}_{B} \cdot x = \underbrace{A^* \cdot v}_{} \rightarrow \begin{pmatrix} u_1^* \\ \vdots \\ u_k^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \end{pmatrix}$$

– <u>T8.80</u>: BUĎ $(u_1, \dots, u_k)$ POSLOUPNOST VEKTORŮ VE V.P. V SE $\langle -,- \rangle$
A BUĎ $B = (\langle u_i, u_j \rangle)_{k \times k}$ GRAMOVA MATICE. PAK PLATÍ:

1. B REGULÁRNÍ $\iff$ $(u_1, \dots, u_k)$ LN
2. B JE HERMITOVSKÁ (V REÁLNÉM PŘÍPADĚ SYMETRICKÁ)
3. JE-LI $(u_1, \dots, u_k)$ LN, PAK JE B POZITIVNĚ DEFINITNÍ.