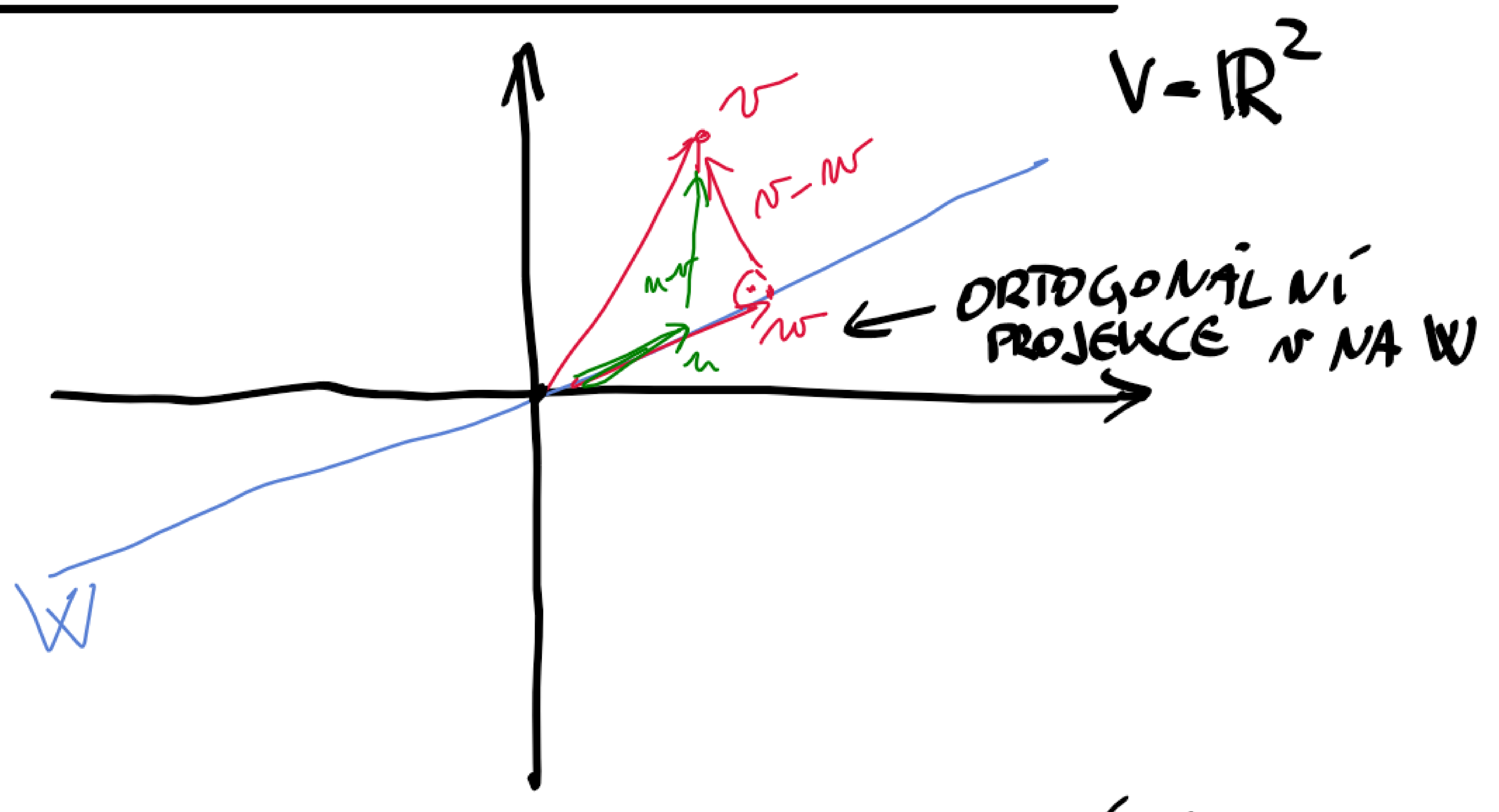
ORTOGONÁLNÍ PROJEKCE A ORTOGONALIZACE

- V TÉTO PŘEDNÁŠCE OPĚT $T = \mathbb{R}$ NEBO $\mathbb{C}$.
- DEF: BUĎ V V.P. SE $\langle \cdot , \cdot \rangle$ A BUĎ $W \leq V$. JE-LI $v \in V$, ORTOGONÁLNÍ PROJEKCÍ VEKTORU v NA PODPROSTOR W ROZUMÍME VEKTOR w TAKOVÝ:
  - $w \in W$,
  - $v - w \perp W$.



$v-w$ ... KOLMICE, CHYBOVÝ VEKTOR

- V8.60: BUĎ V V.P. SE $\langle \cdot , \cdot \rangle$, BUĎ $W \leq V$, $v \in V$ A $w \in W$ ORTOGONÁLNÍ PROJEKCE v NA W. POTOM PRO KAŽDÝ VEKTOR $u \in W$ RŮZNÝ OD w PLATÍ

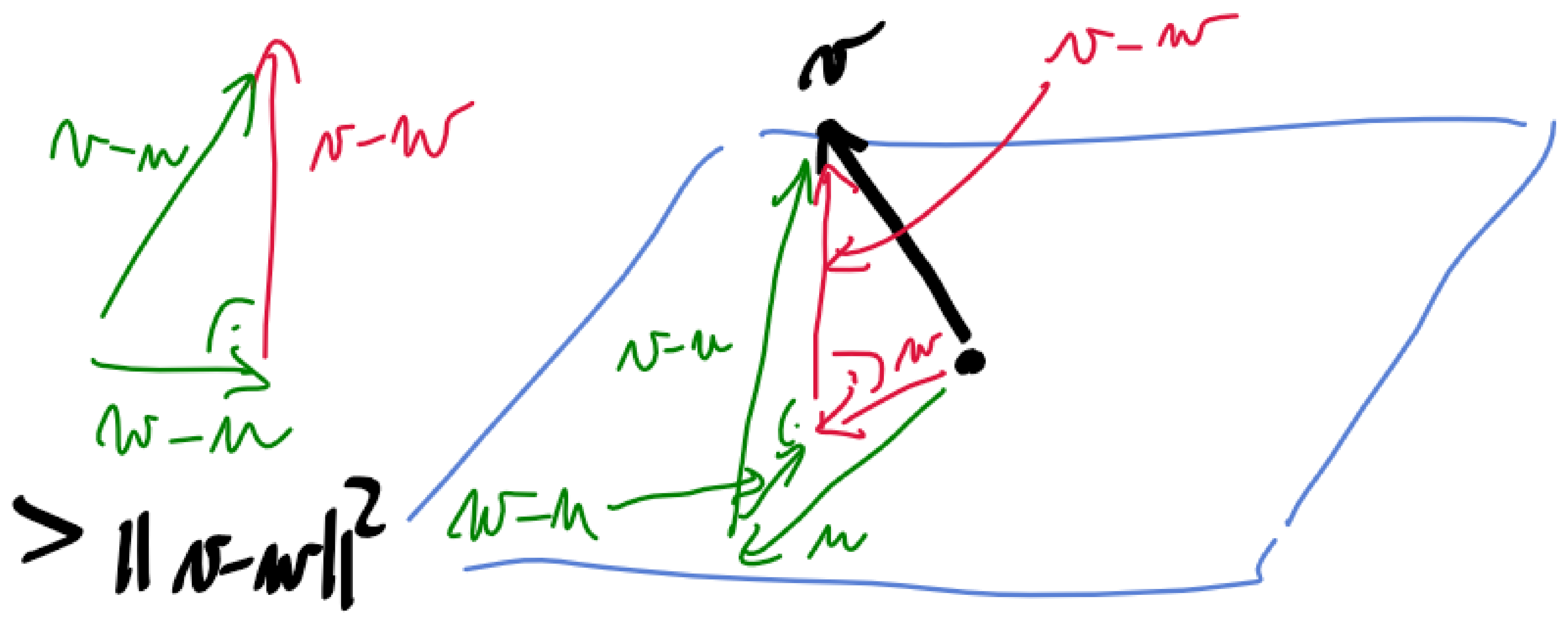
$$\| v - w \| < \| v - u \|$$

SPECIÁLNĚ, EXISTUJE-LI ORTOGONÁLNÍ PROJEKCE v NA W, PAK JE URČENA JEDNOZNAČNĚ.

- DK: - Z PŘEDPOKLADU w, u, A TEDY $w - u \in W$

$\Rightarrow$ $v - w \perp w - u$ $\quad (v - w \perp W)$

$\Rightarrow$ Z PYTHAGOROVY VĚTY: $\|v-u\|^2 = \|v-w\|^2 + \underbrace{\|w-u\|^2}_{>0} > \|v-w\|^2$



- JSOU-LI $w_1 \neq w_2 \in W$ DVĚ RŮZNÉ ORTOGONÁLNÍ PROJEKCE v NA W, PAK: $\|v - w_1\| < \|v - w_2\| < \|v - w_1\|$, ↯.

- EXISTENCE ORTOGONÁLNÍ PROJEKCE ?

- T 8.52: BUĎ V V.P. SE $\langle -, - \rangle$ A BUĎTE $M, N \subseteq V$. PAK

$$M \perp N \iff M \perp LO(N) \quad (\iff LO(M) \perp LO(N)).$$

- DK: $\Leftarrow$: TRIVIÁLNÍ (PROTOŽE $N \subseteq LO(N)$)

$\Rightarrow$: • PŘEDPOKLÁDEJME, ŽE $M \perp N$

• VEZMĚME $v \in M$ A $w = a_1 w_1 + \dots + a_n w_n \in LO(N)$

$(a_1, \dots, a_n \in T, \; w_1, \dots, w_n \in N)$

• PAK $\langle v, w \rangle = \langle v, a_1 w_1 + \dots + a_n w_n \rangle =$

$$= a_1 \underbrace{\langle v, w_1 \rangle}_{=0} + \dots + a_n \underbrace{\langle v, w_n \rangle}_{=0} = 0 \quad (\in T)$$

- VZOREČEK PRO ORTOGONÁLNÍ PROJEKCI VE SPECIÁLNÍM PŘÍPADĚ:

- <u>T8.61</u>: BUĎ V V.P. SE $\langle -,- \rangle$ A $W \leq V$, KTERÝ MÁ ORTONORMÁLNÍ BÁZI $B = (u_1, \dots, u_k)$. PAK PRO LIBOVOLNÉ $v \in V$ JE

$$w := \langle u_1, v \rangle \cdot u_1 + \langle u_2, v \rangle u_2 + \dots + \langle u_k, v \rangle \cdot u_k$$

JE ORTOGONÁLNÍ PROJEKCÍ v DO W.

- <u>POZN</u>: T8.61 ZOBECŇUJE T8.47 (KDYŽ V MÁ ORTONORMÁLNÍ BÁZI, MŮŽEME UVAŽOVAT $W = V$)

- <u>PŘ</u>: $V = \{ f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R} : f \text{ SPOJITÁ} \}$, $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} fg$

$W = LO\{1, \sin x, \cos x\} \rightsquigarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x \right)$ JE ORTONORMÁLNÍ BÁZE

$\rightsquigarrow$ MŮŽEME POČÍTAT ORTOGONÁLNÍ PROJEKCE FUNKCÍ (NAPŘ $f = x + 1$) NA W.

- <u>Dk</u>: - ZJEVNĚ $w \in LO(B) = W$, MUSÍME UKÁZAT, ŽE $v - w \perp W$

- PODLE T 8.52 STAČÍ UKÁZAT, ŽE $v - w \perp u_i \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$

- OZNAČME $a_i := \langle u_i, v \rangle$, TJ. $w = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k$

- PAK $\langle u_i, v - w \rangle = \langle u_i, v - a_1 u_1 - a_2 u_2 - \dots - a_k u_k \rangle =$

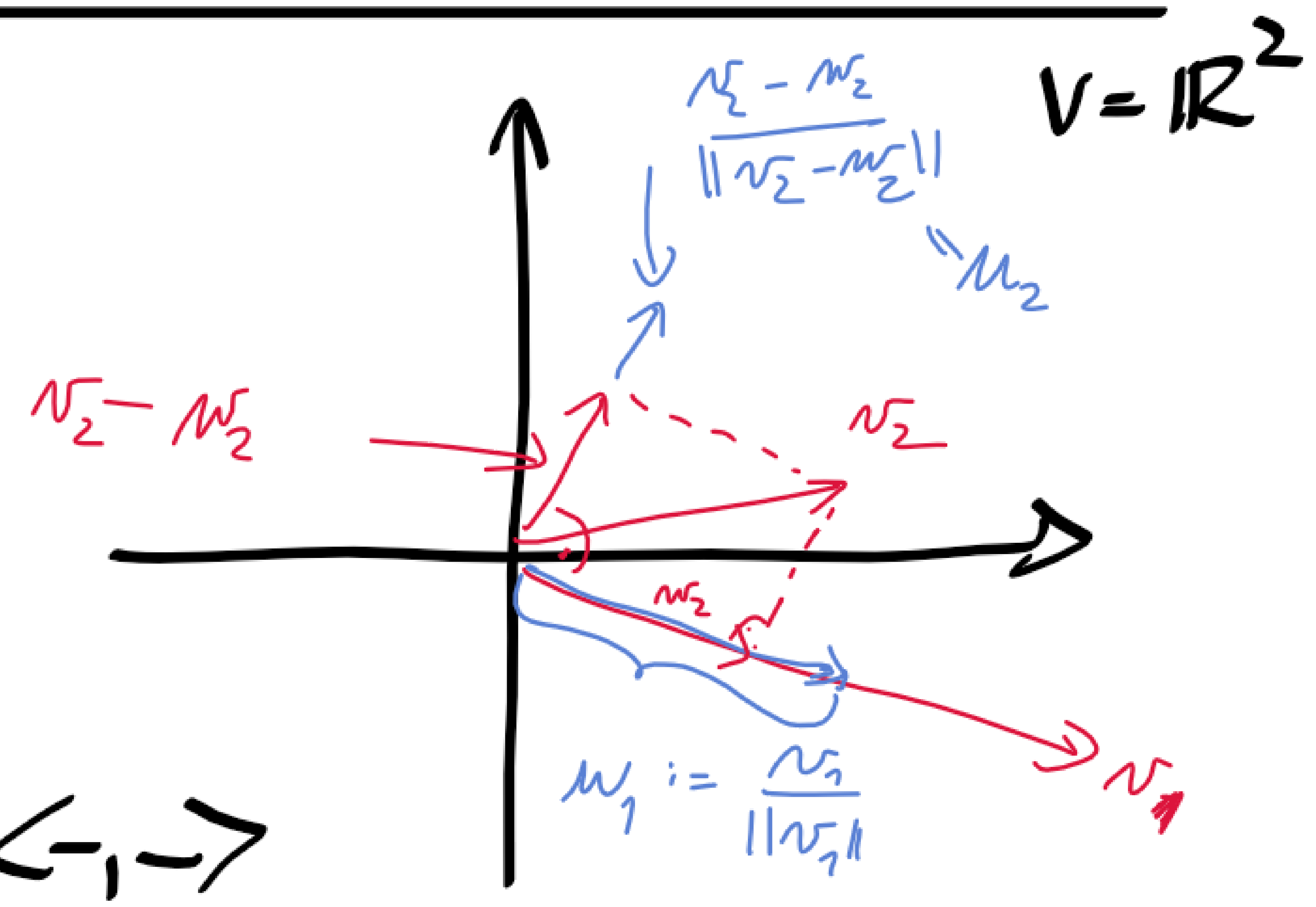
$$= \underbrace{\langle u_i, v \rangle}_{a_i} - a_1 \underbrace{\langle u_i, u_1 \rangle}_{=0} - \dots - a_i \underbrace{\langle u_i, u_i \rangle}_{\|u_i\|^2 = 1} - \dots - a_k \underbrace{\langle u_i, u_k \rangle}_{=0}$$

$$= a_i - a_i \cdot \|u_i\|^2 = a_i - a_i = 0 \qquad \square$$

ILUSTRACE: OBR. 8.7, STR. 304

- <u>POZN</u>: KDYBY B BYLA JEN ORTOGONÁLNÍ, MUSELI BYCHOM VZÍT $w = \frac{\langle u_1, v \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 + \dots + \frac{\langle u_k, v \rangle}{\|u_k\|^2} \cdot u_k$.

– KDY MÁ KONEČNĚ GENEROVANÝ V.P. (NAD $T = \mathbb{R}$ NEBO $\mathbb{C}$) SE SKALÁRNÍM SOUČINEM ORTONORMÁLNÍ BÁZI?



– ODPOVĚĎ: VŽDY!

– GRAMOVA – SCHMIDTOVA ORTOGONALIZACE:

- VSTUP: LN POSLOUPNOST $(v_1, \dots, v_k)$ Z V.P. SE $\langle \cdot , \cdot \rangle$
- VÝSTUP: ORTONORMÁLNÍ POSLOUPNOST $(u_1, \dots, u_k)$ TAKOVÁ, ŽE

$$\forall i \in \{1, \dots, k\}: \quad LO\{v_1, \dots, v_i\} = LO\{u_1, \dots, u_i\}.$$

- ALGORITMUS:

1) $u_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$

2) PRO KAŽDÉ $i = 2, \dots, k$ PROVEDEME:

a) $w_i = \langle u_1, v_i \rangle \cdot u_1 + \langle u_2, v_i \rangle \cdot u_2 + \dots + \langle u_{i-1}, v_i \rangle \cdot u_{i-1}$ (ORTOGONÁLNÍ PROJEKCE v_i NA $LO\{u_1, \dots, u_{i-1}\}$)

b) POLOŽÍME $u_i = \frac{v_i - w_i}{\|v_i - w_i\|}$

– ALGORITMUS:

1) $u_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$

2) PRO KAŽDÉ $i = 2, \dots, k$ PROVEDEME:

a) $w_i = \langle u_1, v_i \rangle \cdot u_1 + \langle u_2, v_i \rangle \cdot u_2 + \dots + \langle u_{i-1}, v_i \rangle \cdot u_{i-1}$ (ORTOGONÁLNÍ PROJEKCE v_i NA $LO\{u_1, \dots, u_{i-1}\}$)

b) POLOŽÍME $u_i = \frac{v_i - w_i}{\|v_i - w_i\|}$

– TO, ŽE $(u_1, \dots, u_i)$ JE ORTONORMÁLNÍ $\forall i \in \{1, \dots, k\}$ DOKÁŽEME INDUKCÍ PODLE i

– STEJNĚ TAK, ŽE $LO\{v_1, \dots, v_i\} = LO\{u_1, \dots, u_i\}$:

$$u_i = \frac{v_i}{\|v_i - w_i\|} - \frac{w_i}{\|v_i - w_i\|} \quad \in LO\{u_1, \dots, u_{i-1}\} \overset{\text{IND. PŘEDP.}}{=} LO\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$$

$$v_i = \|v_i - w_i\| \cdot u_i + w_i = \langle u_1, v_i \rangle \cdot u_1 + \langle u_2, v_i \rangle \cdot u_2 + \dots + \langle u_{i-1}, v_i \rangle \cdot u_{i-1} + \|v_i - w_i\| \cdot u_i$$

– NAKONEC SI MUSÍME UJASNIT, ŽE NIKDY NEDĚLÍME NULOU:

$$\|v_i - w_i\| = 0 \iff v_i = w_i \iff v_i \in LO\{u_1, \dots, u_{i-1}\} \underset{\text{IND. PŘED.}}{=} LO\{v_1, \dots, v_{i-1}\} \iff (v_1, \dots, v_i) \text{ LZ}$$

– **V8.66**: MÁME-LI V.P. V SE $\langle -,- \rangle$ (NAD $\mathbb{R}$ NEBO $\mathbb{C}$) A APLIKUJEME-LI G.-S. ORTOGONALIZACI NA LN POSLOUPNOST VEKTORŮ $(v_1, \ldots, v_k)$ Z V, PAK DOSTANEME ORTONORMÁLNÍ POSLOUPNOST $(u_1, \ldots, u_k)$ TAKOVOU, ŽE $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$ PLATÍ $LO\{u_1, \ldots, u_i\} = LO\{v_1, \ldots, v_i\}$

– **DŮSL**: KAŽDÝ KONEČNĚ GENEROVANÝ V.P. SE SKALÁRNÍM SOUČINEM MÁ ORTONORMÁLNÍ BÁZI.

– **DŮSL 8.69**: MÁME-LI V KON. GEN. V.P. SE $\langle -,- \rangle$ ORTONORMÁLNÍ POSLOUPNOST $(u_1, \ldots, u_k)$, MŮŽEME JI DOPLNIT NA ORTONORMÁLNÍ BÁZI.

– **DK**:
- DOPLNÍME $(u_1, \ldots, u_k)$ DOPLNÍME NA BÁZI $(u_1, \ldots, u_k, v_{k+1}, \ldots, v_n)$
- NA TU BÁZI APLIKUJEME G.-S. ORTOGONALIZACI, DOSTANEME $(u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n)$

– **DŮSL 8.70**: JE-LI V KON. GEN. V.P. S ORTONORMÁLNÍ BÁZÍ $B = (u_1, \ldots, u_n)$ A $\langle -,- \rangle$, PAK $\exists\, f: V \xrightarrow{\cong} T^n$ TAKOVÝ, ŽE $\forall v, w$: $\langle v, w \rangle = f(v) \cdot f(w)$.

– **DK**:
- T6.4 A T.6.29: $\exists\, f: V \xrightarrow{\cong} T^n$ $\quad (f(v) = [v]_B)$, $\quad u_i \longmapsto e_i \quad \forall i$
- $\langle v, w \rangle = [v]_B \cdot [w]_B$ PLYNE Z T8.49

- CO SE STANE, KDYŽ G.-S. ORTOGONALIZACI APLIKUJEME NA T^n SE STD. SKAL. SOUČINEM:

$$v_i = \|v_i - w_i\| \cdot u_i + w_i = \langle u_1, v_i\rangle \cdot u_1 + \langle u_2, v_i\rangle \cdot u_2 + \dots + \langle u_{i-1}, v_i\rangle \cdot u_{i-1} + \|v_i - w_i\| \cdot u_i$$

- MATICOVÝ ZÁPIS: (QR-ROZKLAD, V8.72)

$$\begin{array}{c} \\ n\left\{\underbrace{\begin{pmatrix} v_1 & \big| & v_2 & \big| & \dots & \big| & v_k \end{pmatrix}}_{k}\right. \end{array} = n\left\{\underbrace{\begin{pmatrix} u_1 & \big| & u_2 & \big| & \dots & \big| & u_k \end{pmatrix}}_{k}\right. \cdot \begin{pmatrix} \|v_1\| & \langle u_1, v_2\rangle & \dots \\ & \|v_2 - w_2\| & \vdots \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$A = Q \cdot R$$

HODNOST k → A

ORTONORM. POSL. SLOUPCŮ → Q

HORNÍ Δ, NEZÁPORNÁ REÁLNÁ ČÍSLA NA DIAG. → R