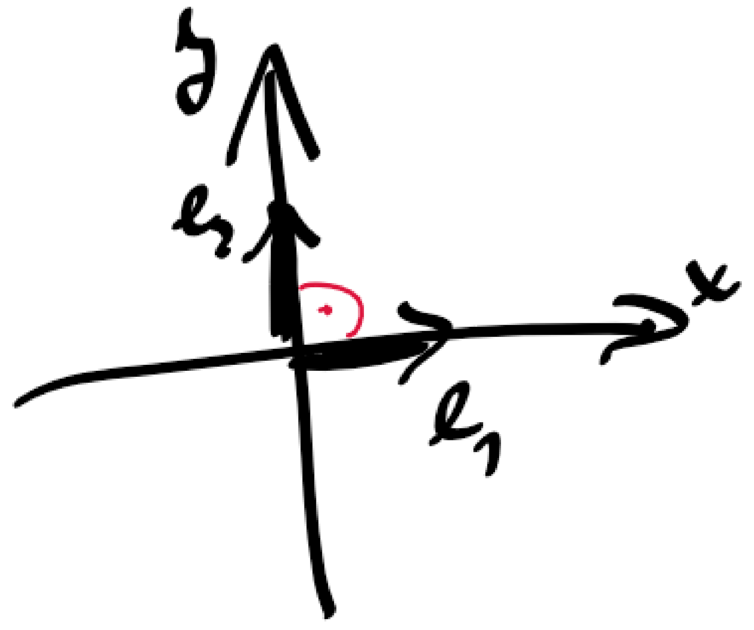
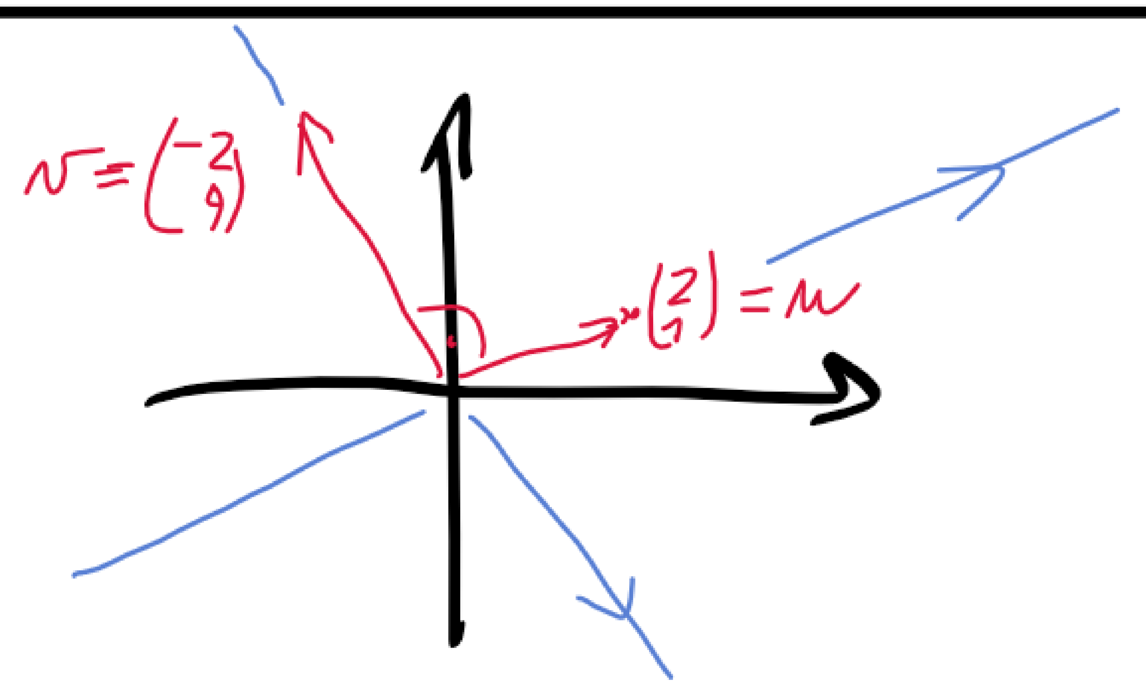
KOLMOST VEKTORŮ A MNOŽIN

- ÚKOLY: I KDYŽ ŘEŠÍTE ÚKOL SAMI – VYTVOŘTE SI SKUPINU PRO SEBE
- KVÍZY !

- PŘ:





$e_1 \cdot e_2 = 0$ $\qquad$ $\|u\| \cdot \|v\| \cos\alpha = u \cdot v = -2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 0$

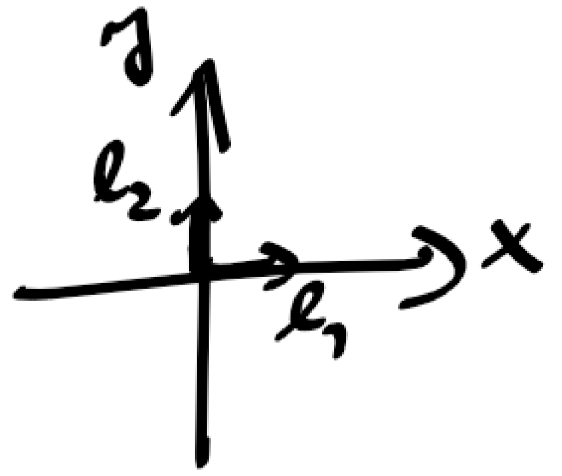
- PRO CELOU PŘEDNÁŠKU: VEKTOROVÉ PROSTORY JSOU NAD $T = \mathbb{R}$ NEBO $\mathbb{C}$
- **DEF**: BUĎ V V.P. SE $\langle -, - \rangle$ A $u, v \in V$. ŘEKNEME, ŽE u A v JSOU KOLMÉ, ZNAČÍME $u \perp v$, POKUD $\langle u, v \rangle = 0$.

- POZN.:
  1. $\forall u \in V: \quad u \perp 0$
  2. $u \perp v \iff v \perp u \qquad \left(\langle u, v \rangle = 0 \Rightarrow \langle v, u \rangle \overset{(SSS)}{=} \overline{\langle u, v \rangle} = \overline{0} = 0 \right)$
  3. $\forall u, v \in V \ \forall s, t \in T: \quad u \perp v \Rightarrow su \perp tv \qquad \left(\langle su, tv \rangle = \bar{s} \cdot t \cdot \langle u, v \rangle \right)$

-DEF: MNOŽINA M NEBO POSLOUPNOST VEKTORŮ V.P. V SE $\langle \cdot , \cdot \rangle$ SE NAZÝVÁ:

- **ORTOGONÁLNÍ**, POKUD KAŽDÁ DVOJICE RŮZNÝCH PRVKŮ M JE KOLMÁ.
- **ORTONORMÁLNÍ**, POKUD JE ORTOGONÁLNÍ A KAŽDÝ PRVEK MÁ NORMU 1.

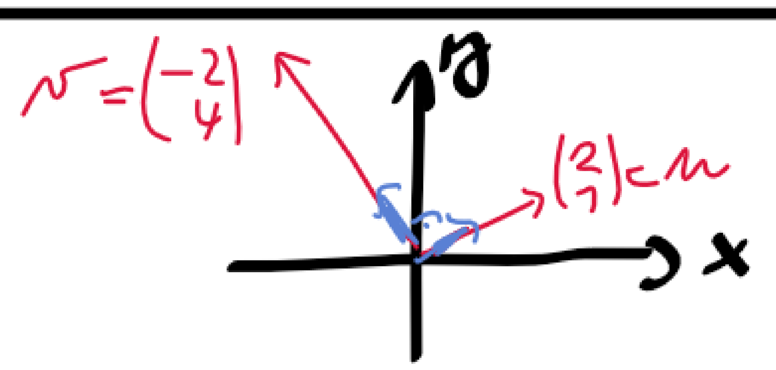
-PŘ: 1) $V = \mathbb{R}^2$



(e_1, e_2) JE ORTONORMÁLNÍ VZHLEDEM KE STANDARDNÍMU SKALÁRNÍMU SOUČINU.

---

2)



- (u, v) JE ORTOGONÁLNÍ, NENÍ ORTONORMÁLNÍ.
  $\|u\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$, $\|v\| = 2\sqrt{5}$
- $\left(\frac{1}{\sqrt{5}} u, \frac{1}{2\sqrt{5}} v\right) = \left(\frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|}\right)$ JE ORTONORMÁLNÍ BÁZE

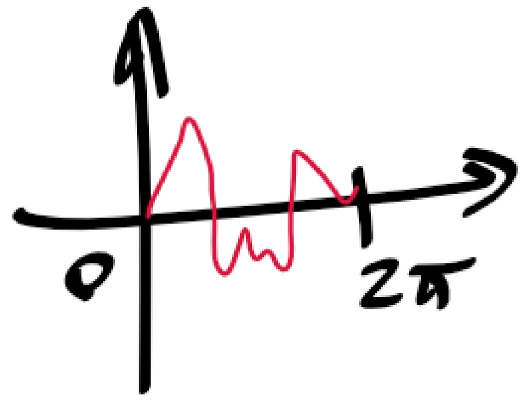
---

3) $\left((1,2,2)^T, (-2,-1,2)^T, (2,-2,1)^T\right)$ JE ORTOGONÁLNÍ V $\mathbb{R}^3$ VŮČI STD. S. S.

-POZN: 1) KANONICKÁ BÁZE T^n $(T = \mathbb{R}, \mathbb{C})$ JE ORTONORMÁLNÍ VŮČI STD. SKALÁRNÍMU SOUČINU.

2) $(v_1, \dots, v_k)$ ORTOGONÁLNÍ POSL. $\neq 0$ VEKTORŮ, PAK $\left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \dots, \frac{v_k}{\|v_k\|}\right)$ JE ORTONORMÁLNÍ.

- PŘ:
$$V = \{ f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R} \;:\; f \text{ SPOJITÁ} \}$$



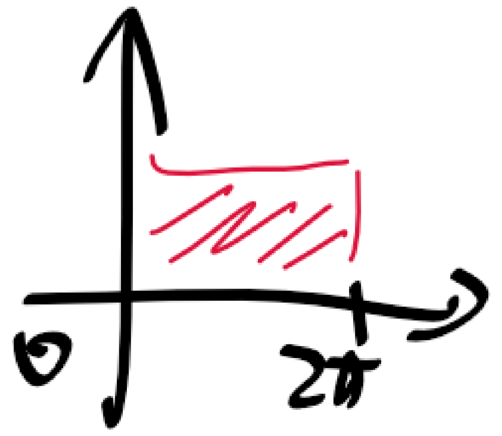
$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} fg$$ JE SKALÁRNÍ SOUČIN

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^{2\pi} f^2}$$

- FAKT: MNOŽINA $\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \sin 3x, \cos 3x, \dots\}$ JE ORTOGONÁLNÍ. NENÍ BÁZE! NÁPRAVA: FUNCIONÁLNÍ ANALÝZA.

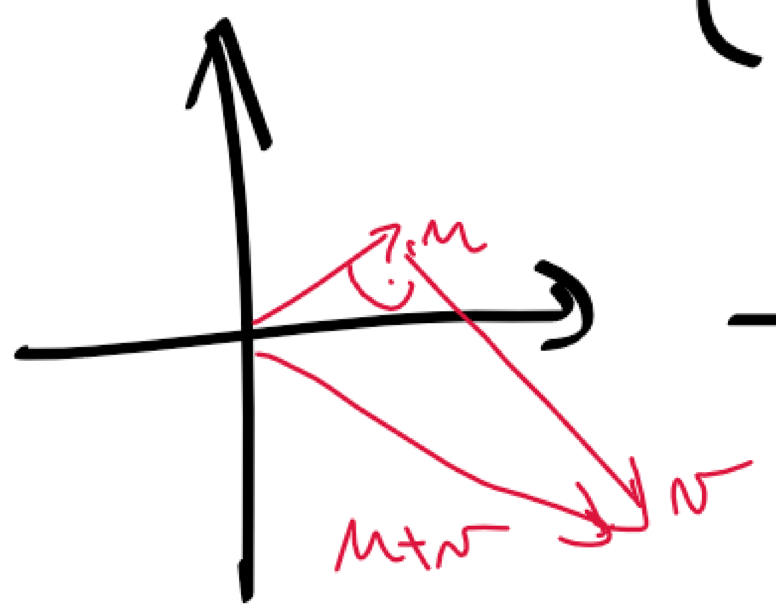
NENÍ ORTONORMÁLNÍ

$$\|1\|^2 = \int_0^{2\pi} 1^2 = 2\pi$$



$$\|\sin x\|^2 = \int_0^{2\pi} (\sin x)^2 = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2x}{2} = \pi$$

- **T8.46**: (PYTHAGOROVA VĚTA)
V VEKTOROVÝ PROSTOR SE $\langle -,- \rangle$, BUĎTE $u, v \in V$ KOLMÉ VEKTORY ($u \perp v$). PAK

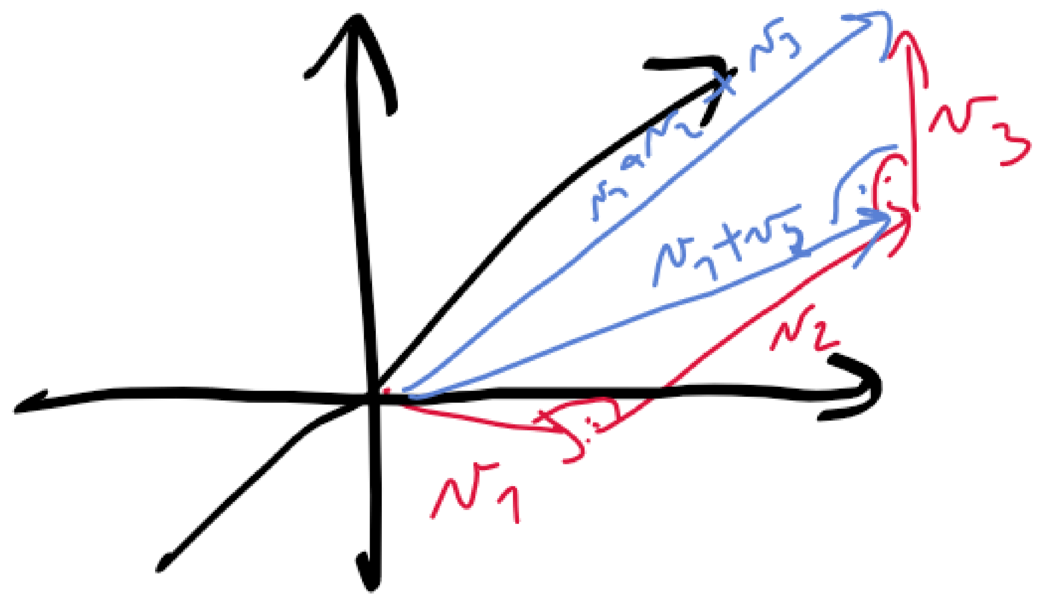


$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

- **Dk**:

$$\underbrace{\langle u+v, u+v \rangle}_{\|u+v\|^2} = \underbrace{\langle u,u \rangle}_{\|u\|^2} + \underbrace{\langle v,u \rangle + \langle u,v \rangle}_{=0 \ (u \perp v)} + \underbrace{\langle v,v \rangle}_{\|v\|^2}$$

- **DŮSLEDEK**: JE-LI $(v_1, \dots, v_k)$ ORTOGONÁLNÍ POSLOUPNOST, PAK



$$\|v_1 + \dots + v_k\|^2 = \|v_1\|^2 + \dots + \|v_k\|^2$$

- **Dk**: INDUKCE PODLE k:

$k=1$: $\|v_1\|^2 = \|v_1\|^2$ TAUTOLOGIE

$k>1$: PŘEDP. PLATNOST PRO $k-1$

$$\|v_1 + \dots + v_{k-1} + v_k\|^2 \underset{T8.46}{=} \|v_1 + \dots + v_{k-1}\|^2 + \|v_k\|^2 \underset{\text{IND. PŘEDP.}}{=} \|v_1\|^2 + \dots + \|v_{k-1}\|^2 + \|v_k\|^2$$

– **T 8.40**: BUĎ V VEKTOROVÝ PROSTOR SE $\langle \cdot, \cdot \rangle$ A $(v_1, \dots, v_k)$ ORTOGONÁLNÍ POSLOUPNOST NENULOVÝCH VEKTORŮ. PAK JE $(v_1, \dots, v_k)$ LN.

– **DK**: – PŘEDPOKLÁDEJME, ŽE $0 = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k$, KDE $a_1, \dots, a_k \in T$ $(T = \mathbb{R}, \mathbb{C})$

– MUSÍME UKÁZAT, ŽE $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$

– TOTIŽ $\forall i \in \{1, \dots, k\}$:

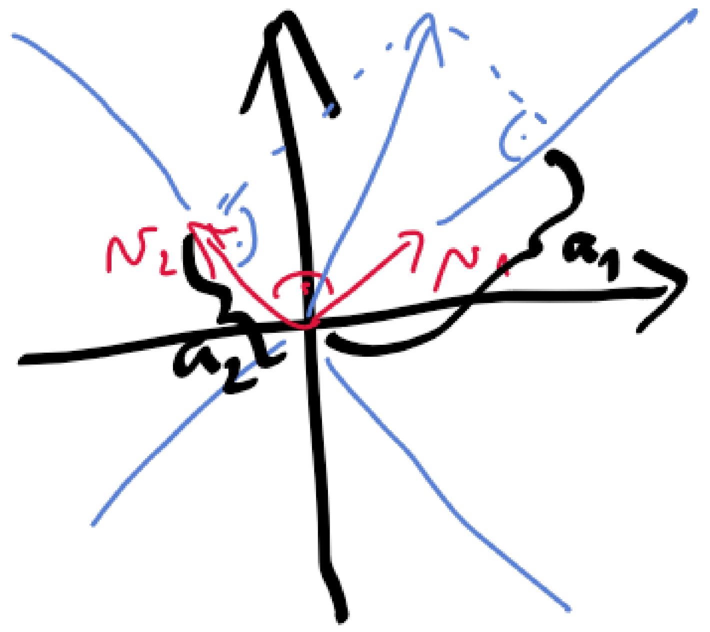
$$0 = \langle v_i, 0 \rangle = \langle v_i, a_1 v_1 + \dots + a_k v_k \rangle = a_1 \underbrace{\langle v_i, v_1 \rangle}_{=0} + \dots + a_i \underbrace{\langle v_i, v_i \rangle}_{\|v_i\|^2 \neq 0} + \dots + a_k \underbrace{\langle v_i, v_k \rangle}_{=0}$$

$$= a_i \cdot \|v_i\|^2$$

$$\overset{\|v_i\| \neq 0}{\implies} \quad \forall i: \quad a_i = 0$$

- ORTONORMÁLNÍ BÁZE A VYJÁDŘENÍ VEKTORŮ VZHLEDEM K NIM:

- T8.47: V U.P. SE $\langle -,- \rangle$, $B = (v_1, \dots, v_n)$ ORTONORMÁLNÍ BÁZE. PAK PRO KAŽDÝ $u \in V$ PLATÍ



$$u = \underbrace{\langle v_1, u \rangle}_{\in T} \cdot \underbrace{v_1}_{\in V} + \langle v_2, u \rangle \cdot v_2 + \dots + \langle v_n, u \rangle \cdot v_n .$$

TO JEST

$$[u]_B = \begin{pmatrix} \langle v_1, u \rangle \\ \langle v_2, u \rangle \\ \vdots \\ \langle v_n, u \rangle \end{pmatrix}$$

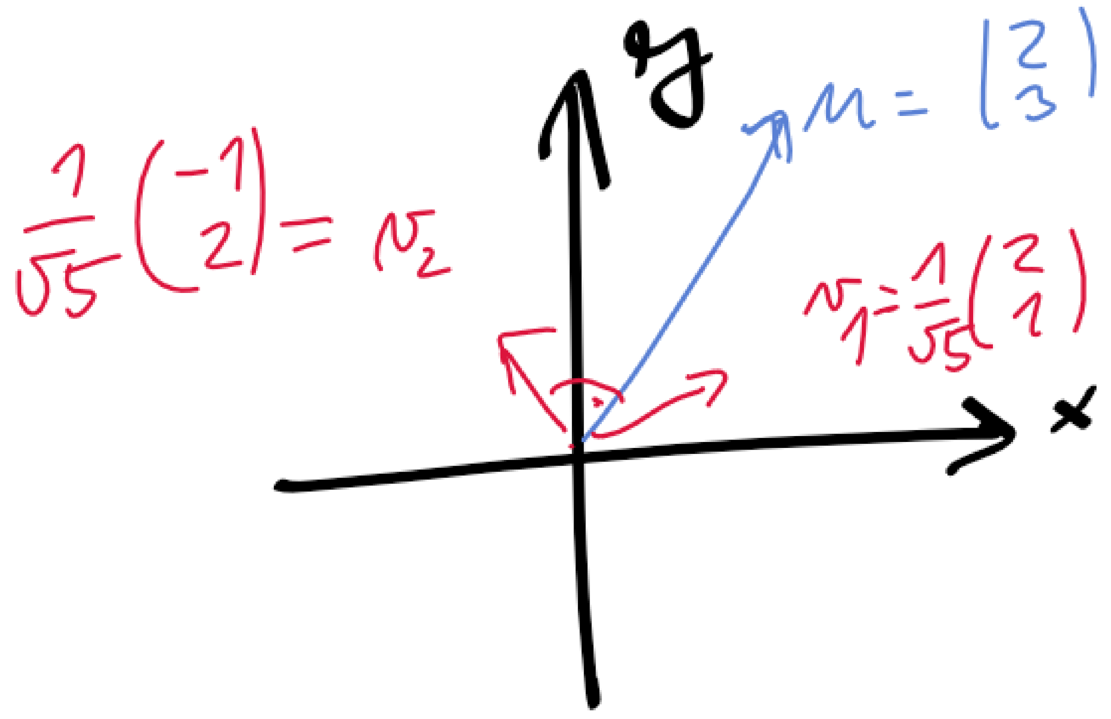
FOURIEROVY KOEFICIENTY

- DK: - VEZMEME $a_1, \dots, a_n \in T$ TAK, ABY $u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$
- UKÁŽEME, ŽE $\forall i \in \{1, \dots, n\}$! $a_i = \langle v_i, u \rangle$
- MÁME

$$\langle v_i, u \rangle = \langle v_i, a_1 v_1 + \dots + a_i v_i + \dots + a_n v_n \rangle =$$
$$= a_1 \underbrace{\langle v_i, v_1 \rangle}_{=0} + \dots + a_i \underbrace{\langle v_i, v_i \rangle}_{=1} + \dots + a_n \underbrace{\langle v_n, v_i \rangle}_{=0} = a_i \qquad \square$$

- POZN: KDYBY B BYLA JEN ORTOGONÁLNÍ, PAK $[u]_B = \left(\frac{\langle v_1, u \rangle}{\|v_1\|^2}, \frac{\langle v_2, u \rangle}{\|v_2\|^2}, \dots \right)^T$.

– PŘ:



$\left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}}_{v_2}\right)$ JE ORTONORMÁLNÍ BÁZE $\mathbb{R}^2$ VŮČI STD. SKAL. SOUČINU

$$[u]_B = \begin{pmatrix}\langle v_1, u\rangle \\ \langle v_2, u\rangle\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}\cdot(2\cdot 2 + 3\cdot 1) \\ \frac{1}{\sqrt5}(-1\cdot 2 + 2\cdot 3)\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt5}\cdot\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}$$

$$u = \frac{7}{\sqrt5}\cdot v_1 + \frac{4}{\sqrt5}\cdot v_2$$

- **T 8.49**: V V.P. SE $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $B = (v_1, \dots, v_n)$ ORTONORMÁLNÍ BÁZE, $u, w \in V$. PAK

$$\langle u, w \rangle = \underset{\text{STD. SKAL. SOUČIN}}{[u]_B \bullet [w]_B} = \underbrace{[u]_B^* \, [w]_B}_{\text{MATICOVÝ ZÁPIS.}}$$

- **Dk**: • BUĎ $[u]_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $[w]_B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

• PAK $\langle u, w \rangle = \langle a_1 v_1 + \dots + a_n v_n , b_1 v_1 + \dots + b_n v_n \rangle =$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i v_i , \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \right\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \overline{a_i} \cdot b_j \cdot \langle v_i, v_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{a_i} \, b_i \cdot \underbrace{\langle v_i, v_i \rangle}_{1} =$$

$\boxed{\text{ČLENY, KDE } i \neq j, \text{ JSOU NULOVÉ}}$

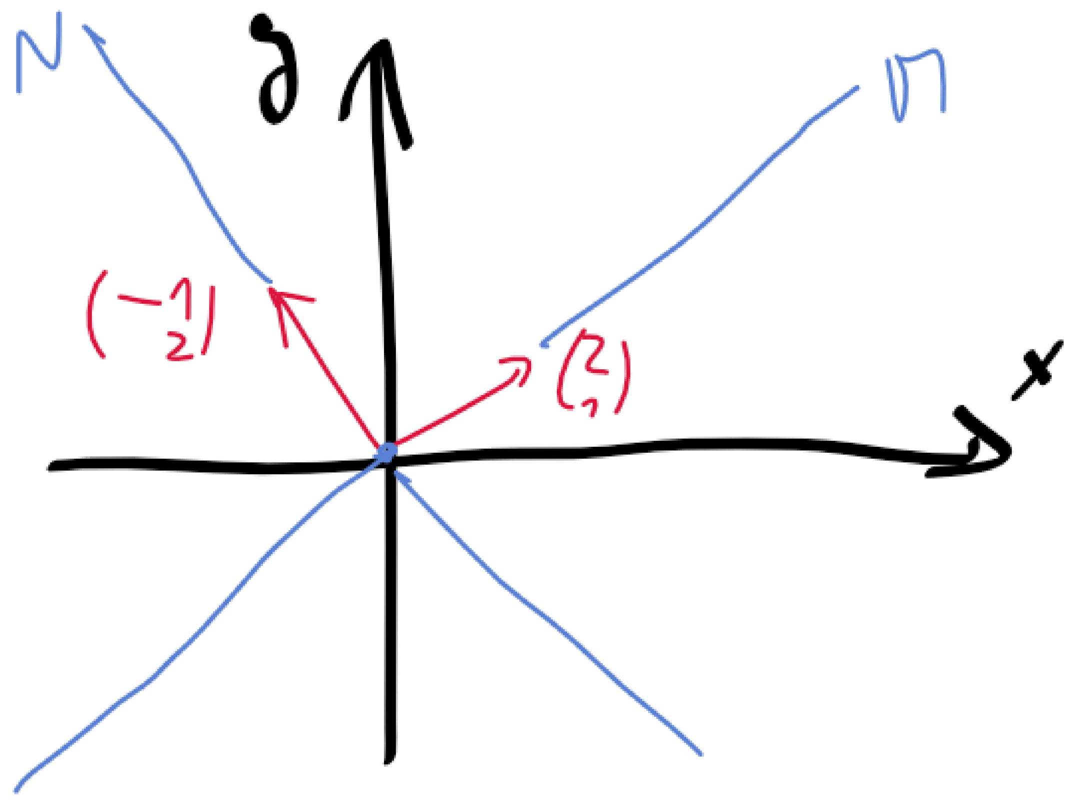
$$= \sum_{i=1}^{n} \overline{a_i} \, b_i = [u]_B^* \cdot [w]_B .$$

- **KOLMOST MNOŽIN:**

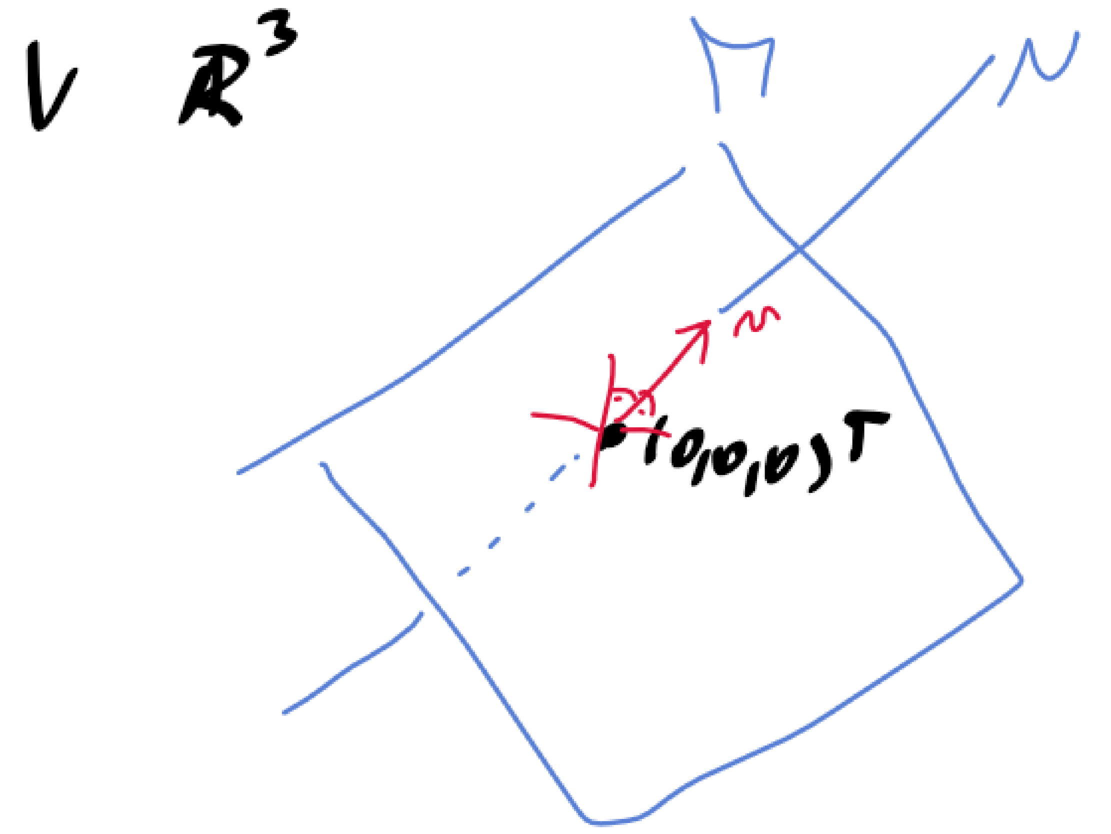
- **DEF 8.53:** V V.P. SE $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $v \in V$, $M, N \subseteq V$. PAK ŘEKNEME, ŽE

  - v JE KOLMÝ K M, ZNAČÍME $v \perp M$, POKUD $v \perp w$ $\forall w \in M$, A
  - M JE KOLMÁ K N, ZNAČÍME $M \perp N$, POKUD $v \perp w$ $\forall v \in M$ $\forall w \in N$.

- **PŘ:**



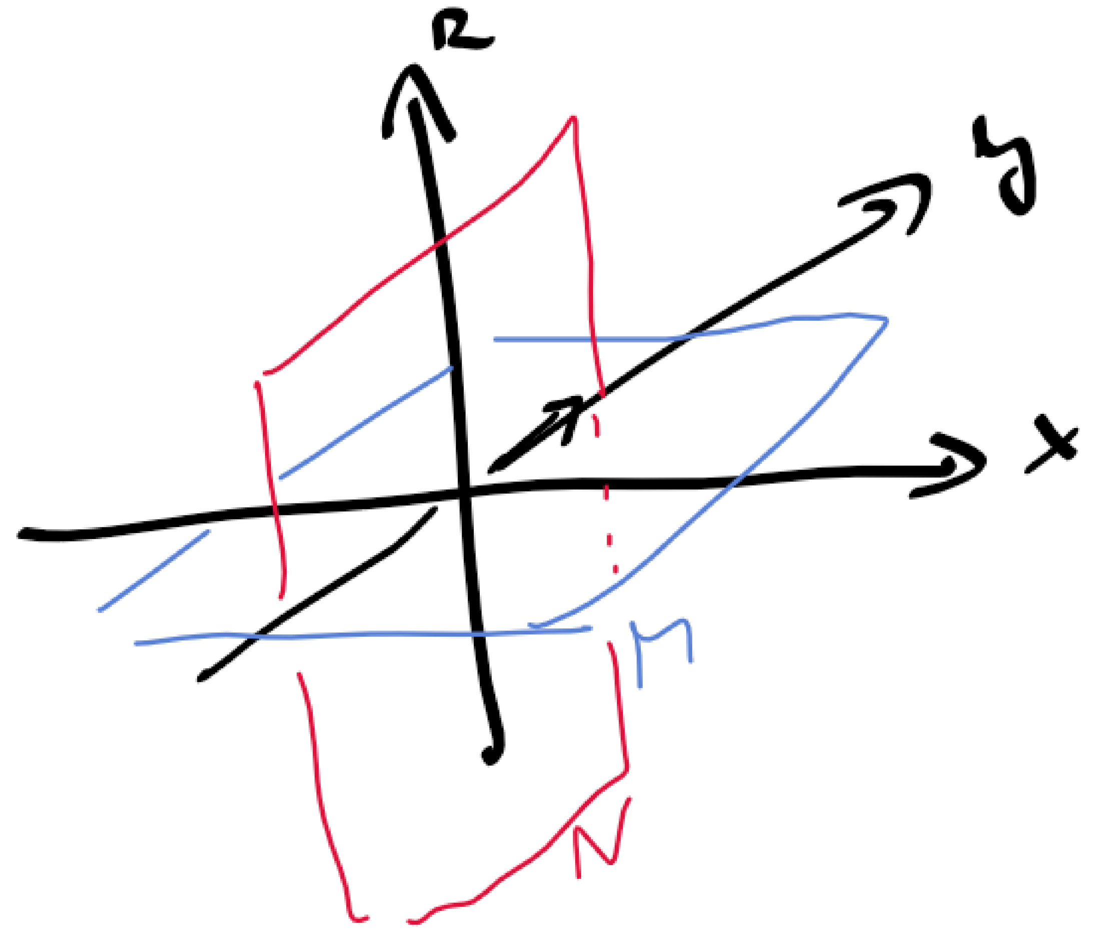
$M \perp N$



$v \perp M$

$N \perp M$

- **POZOR!**



- M A N NEJSOU KOLMÉ PODLE DEFINICE

- **OTÁZKA:** DÁ SE DEFINOVAT SKALÁRNÍ SOUČIN NAD $\mathbb{Z}_p$?
  - TAK JAKO NAD $\mathbb{R}$ NEBO $\mathbb{C}$ NE!
  - ALE DÁ SE DEFINOVAT PŘIBLÍŽENÍ:
    - V V.P. NAD $\mathbb{Z}_p$, MŮŽEME UVAŽOVAT ZOBRAZENÍ

$$\begin{aligned} \langle -,- \rangle : V \times V &\longrightarrow \mathbb{Z}_p \\ (v,w) &\longmapsto \langle v,w \rangle \end{aligned}$$

KTERÉ SPLŇUJE AXIOMY INSPIROVANÉ ZOBRAZENÍM

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_p^n \times \mathbb{Z}_p^n &\longrightarrow \mathbb{Z}_p^n \\ (x,y) &\longmapsto x_1y_1 + \dots + x_ny_n \end{aligned}$$

- **AXIOMY:**

$$\left.\begin{aligned} &(SL1) \quad \langle u, tv \rangle = t\langle u,v \rangle \\ &(SL2) \quad \langle u, v+w \rangle = \langle u,v \rangle + \langle u,w \rangle \\ &(SS) \quad \langle u,v \rangle = \langle v,u \rangle \end{aligned}\right\} \text{SYMETRICKÁ BILINEÁRNÍ FORMA NA } V$$

SYMETRIE $\longrightarrow$ (SS)

- ALE NEPLATÍ NAPŘ.: $u \neq 0 \Rightarrow \langle u,u \rangle = 0$
- **PŘ.:** $u = (1,1,1)^T \in \mathbb{Z}_3 \rightsquigarrow \langle u,u \rangle = 1+1+1 = 3 = 0$