SKALÁRNÍ SOUČIN – POKRAČOVÁNÍ

– **DEF 8.15 (OBECNÝ SKALÁRNÍ SOUČIN):** BUĎ $T = \mathbb{R}$ NEBO $\mathbb{C}$ A BUĎ V VEKTOROVÝ PROSTOR NAD T. PAK ZOBRAZENÍ $\langle -,- \rangle : V \times V \longrightarrow T$ JE **SKALÁRNÍ SOUČIN**, POKUD $\forall u, v, w \in V$ $\forall t \in T$ PLATÍ:

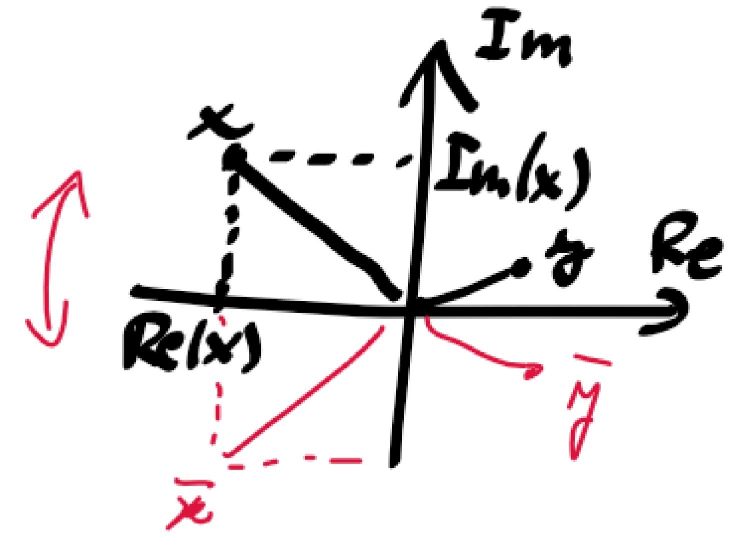
"SKOROSYMETRIE" (SSS) $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$

LINEARITA (SL1) $\langle u, tv \rangle = t \cdot \langle u, v \rangle$

(SL2) $\langle u, v+w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$

POZITIVNÍ DEFINITNOST (SP) $\langle u, u \rangle$ JE NEZÁPORNÉ REÁLNÉ ČÍSLO A $(\langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0)$

$\langle u, u \rangle \geq 0$ NEPŘESNÉ



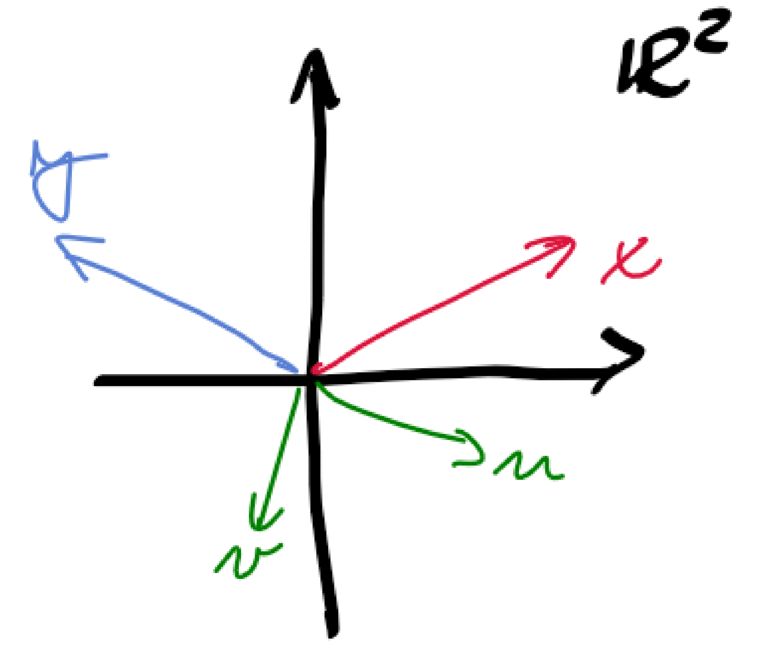
- $\overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y}$
- $\overline{x \cdot y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$

– **POZOROVÁNÍ 8.16:**

1. $\langle tu, v \rangle \overset{(SSS)}{=} \overline{\langle v, tu \rangle} \overset{(SL1)}{=} \overline{t \cdot \langle v, u \rangle} = \overline{t} \cdot \overline{\langle v, u \rangle} \overset{(SSS)}{=} \overline{t} \cdot \langle u, v \rangle$
2. DOSADÍME $t = 0$ V (SL1) A (1): $\langle 0, v \rangle = 0 = \langle u, 0 \rangle$
3. $\langle u+v, w \rangle \overset{(SSS)}{=} \overline{\langle w, u+v \rangle} \overset{(SL2)}{=} \overline{(\langle w, u \rangle + \langle w, v \rangle)} = \overline{\langle w, u \rangle} + \overline{\langle w, v \rangle} \overset{(SSS)}{=} \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$

– **PŘ 8.17**: $T = \mathbb{R}$ NEBO $\mathbb{C}$, $V = T^n$, $\langle u, v \rangle = u \cdot v$ (STD. SKALÁRNÍ SOUČIN)

– **PŘ 8.18**:
- A ČTVERCOVÁ MATICE ŘÁDU n NAD T, $T = \mathbb{R}$ NEBO $\mathbb{C}$
- POLOŽÍME $\langle u, v \rangle_A := u^* A v \quad \forall u, v \in T^n$
- KDY JE $\langle -, - \rangle_A : T^n \times T^n \to T$ SKALÁRNÍ SOUČIN?
  CO MUSÍ SPLŇOVAT A?



SPOČÍTAT $\langle u, v \rangle$ Z $[u]_B, [v]_B$

$B = (x, y)$, $A = \begin{pmatrix} \langle x,x \rangle & \langle x,y \rangle \\ \langle y,x \rangle & \langle y,y \rangle \end{pmatrix}$

– **POZOROVÁNÍ**: $\langle -, - \rangle_A$ VŽDY SPLŇUJE (SL1), (SL2).

– **POZOROVÁNÍ 8.19**: $\langle -, - \rangle_A$ SPLŇUJE (SSS) $\iff A = A^*$

(– **DEF 8.20**: A SPLŇUJÍCÍ $A = A^*$ SE NAZÝVÁ HERMITOVSKÁ)

$\Rightarrow$: AŤ $\langle -, - \rangle_A$ SPLŇUJE (SSS). PAK TEDY $\forall i, j$: $a_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle_A = \overline{\langle e_j, e_i \rangle_A} = \overline{a_{ji}}$

$\Leftarrow$: AŤ $A = A^*$. PAK $\quad \overline{v^* A u} \overset{?}{=} u^* A v$

$$\overline{\langle v, u \rangle_A} = \overline{v^* A u} = (v^* A u)^* = u^* A^* v = u^* A v = \langle u, v \rangle_A$$

– NA CO SE PŘELOŽÍ (CP)?

– <u>DEF 8.21</u>: BUĎ $T = \mathbb{R}$ NEBO $\mathbb{C}$ A BUĎ $A \in T^{n \times n}$ (A JE MATICE TYPU $n \times n$)
PAK A JE POZITIVNĚ DEFINITNÍ, POKUD JE HERMITOVSKÁ A PLATÍ:

1. $u^* A u$ JE $\forall u \in T^n$ NEZÁPORNÉ REÁLNÉ ČÍSLO A
2. $u^* A u = 0 \iff u = 0$.

– <u>POZOROVÁNÍ</u>: $\langle -,- \rangle_A : T^n \times T^n \to T$ JE SKALÁRNÍ SOUČIN, PRÁVĚ KDYŽ A JE POZITIVNĚ DEFINITNÍ.

– <u>POZN</u>: 1) A POZITIVNĚ DEFINITNÍ $\Rightarrow$ A REGULÁRNÍ
$\cancel{\Leftarrow}$

– <u>DK</u>: <u>$\Rightarrow$</u>: KDYBY A NEBYLA REGULÁRNÍ, PAK $\exists\, 0 \neq u \in T^n : A \cdot u = 0$
$\Rightarrow u^* A u = 0$, ČILI A NENÍ POZITIVNĚ DEF.

$\cancel{\Leftarrow}$: NAPŘ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ JE REGULÁRNÍ, ALE $(1\ {-1})\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}} = -2$

---

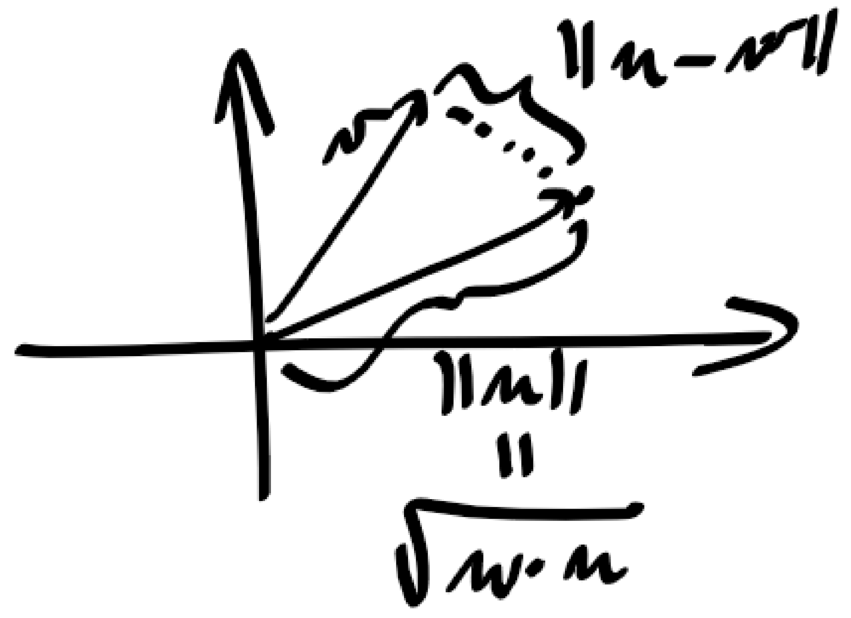
2) POKUD $B \in T^{n \times n}$ TAKOVÁ, ŽE $A = B^* B$ A B REGULÁRNÍ, PAK A JE POZITIVNĚ DEF.
<u>TOTIŽ</u>: $u \in T^n$, $\langle u, u \rangle_A = u^* A u = u^* B^* B u = (Bu)^* (Bu) = Bu \bullet Bu = \| Bu \|^2$

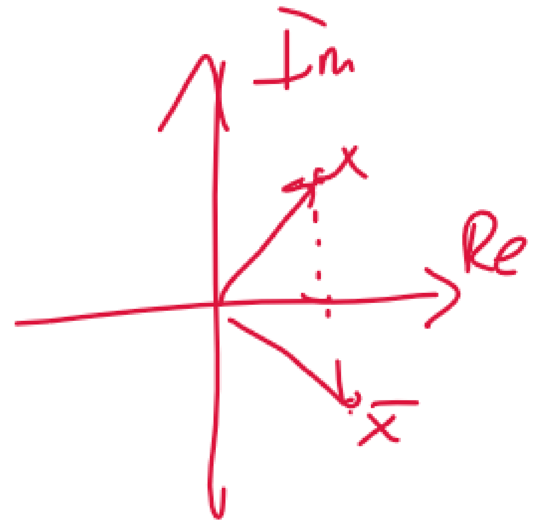
– **PŘ**: $V = \ell_2 = \{ (a_n)_{n=1}^{\infty} : a_n \in \mathbb{C} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \}$

- PAK $\langle (a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty} \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n} \cdot b \in \mathbb{C}$

URČUJE SKALÁRNÍ SOUČIN $\langle \cdot, \cdot \rangle : \ell_2 \times \ell_2 \longrightarrow \mathbb{C}$.

– NORMA: ANEB MĚŘENÍ VZDÁLENOSTI VEKTORŮ





- $x\bar{x} = |x|^2$
- $x+\bar{x} = 2\cdot \mathrm{Re}\,x$

– **DEF:** BUĎ V V.P. NAD $T = \mathbb{R}$ NEBO $\mathbb{C}$ SE SKALÁRNÍM SOUČINEM $\langle -, - \rangle$.
PAK NORMOU VEKTORU $u \in V$ ROZUMÍME

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

– VLASTNOSTI NORMY:

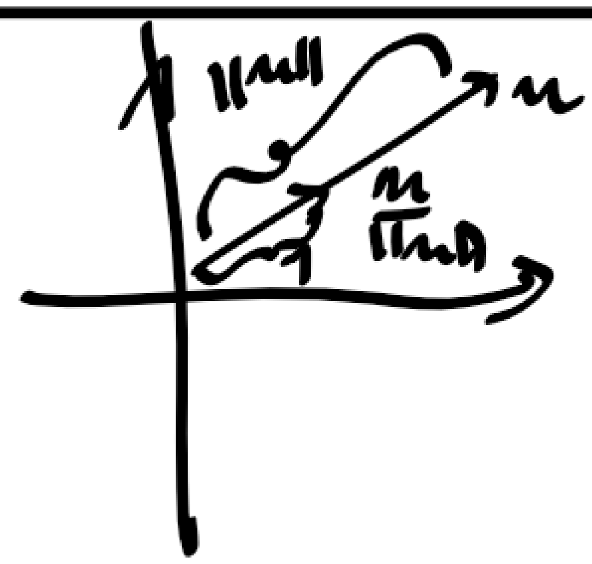
– **T8.32:**

1. $\|u\| \geq 0$ A $(\|u\| = 0 \iff u = 0)$.
2. $\forall t \in T: \quad \|tu\| = |t|\,\|u\|$.
3. $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$
4. $\mathrm{Re}(\langle u, v \rangle) = \frac{1}{2}(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2)$

(POUŽIJEME (SP))

$$\left(\|t\cdot u\| = \sqrt{\langle tu, tu\rangle} \overset{(SL1)}{=} \sqrt{\bar{t}\cdot t \cdot \langle u, u\rangle} = \sqrt{|t|^2}\sqrt{\langle u, u\rangle} = |t|\cdot\|u\| \right)$$

– POZN: $0 \neq u \in V \implies \frac{u}{\|u\|}$ MÁ NORMU 1



V 8.33 (CAUCHY-SCHWARZOVA NEROVNOST)

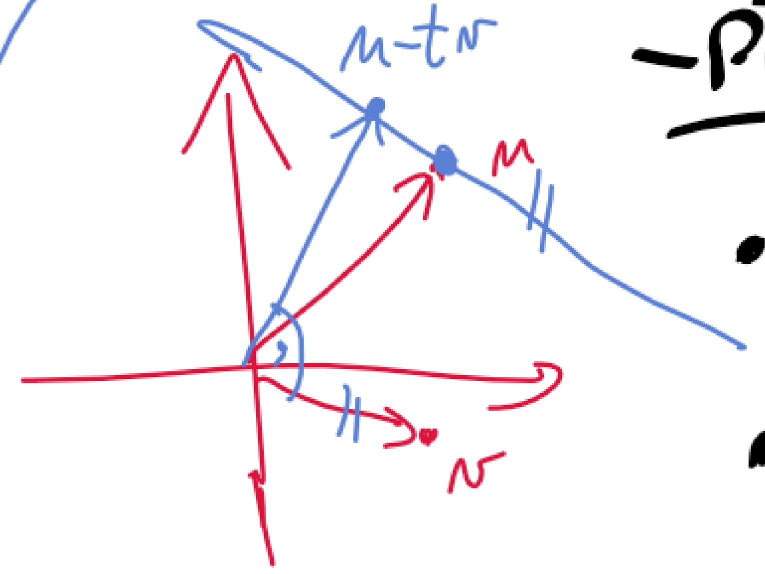
BUĎ $T = \mathbb{R}$ NEBO $\mathbb{C}$, V V.P. NAD T SE SKAL. SOUČINEM $\langle \cdot,\cdot \rangle$.

PAK PLATÍ $\forall u,v \in V$: $|\langle u,v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$. ROVNOST $\iff$ (u,v) LZ.

DK: – PŘÍPAD 1): (u,v) LZ: BUĎ $u = tv$, NEBO $v = tu$.

• $|\langle u,v\rangle| = |\langle u, t\cdot u\rangle| = |t|\cdot|\langle u,u\rangle| = \underbrace{|t|\,\|u\|}_{\|v\|}\|u\| = \|u\|\cdot\|v\|$.

– PŘÍPAD 2: (u,v) LN:



• VÍME: $\|u - tv\|^2 > 0 \quad \forall t \in T \quad ((u,v)\ \text{LN})$

• ZVOLME t TAK, ABY $\langle v, u - tv\rangle = 0$

$$\langle v, u - tv\rangle = \langle v,u\rangle - t\langle v,v\rangle = \langle v,u\rangle - t\underbrace{\|v\|^2}_{\neq 0}$$

$$\rightsquigarrow \quad t = \frac{\langle v,u\rangle}{\|v\|^2}$$

• $0 < \|u - tv\|^2 = \langle u - tv, u - tv\rangle = \langle u, u - tv\rangle - \bar{t}\cdot\underbrace{\langle v, u - tv\rangle}_{0} =$

$= \langle u, u - tv\rangle = \langle u,u\rangle - t\langle u,v\rangle = \|u\|^2 - \dfrac{\langle v,u\rangle\cdot\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}$ (SSS) $=$

$= \|u\|^2 - \dfrac{\overline{\langle u,v\rangle}\langle u,v\rangle}{\|v\|^2} = \|u\|^2 - \dfrac{|\langle u,v\rangle|^2}{\|v\|^2}$

• TJ: $0 < \|u\|^2\|v\|^2 - |\langle u,v\rangle|^2$

$|\langle u,v\rangle|^2 < \|u\|^2\|v\|^2$

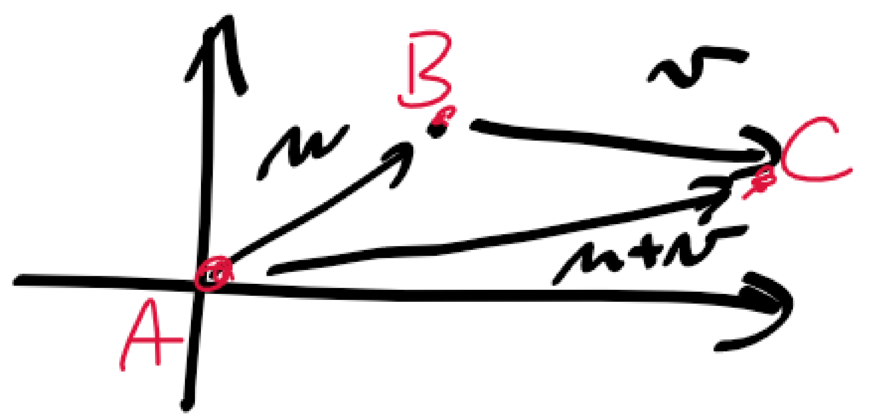
$\langle u,v\rangle < \|u\|\cdot\|v\|$

$\square$

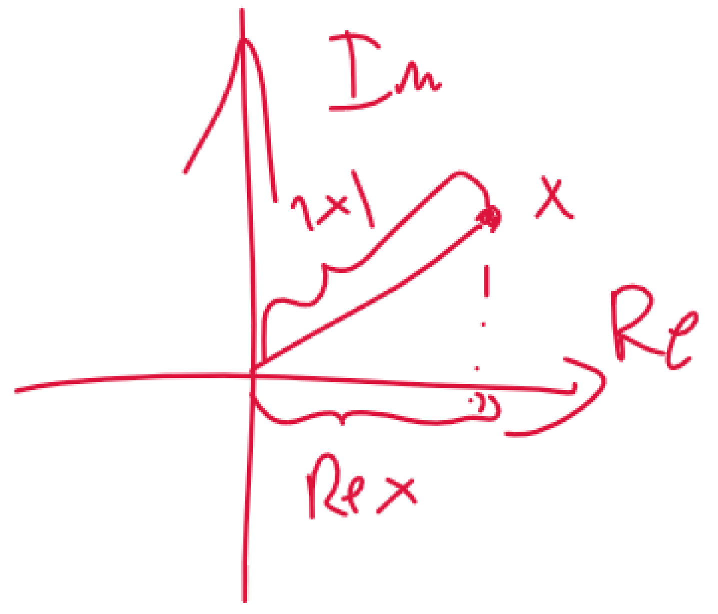
– DŮSL 8.35 (TROJÚHELNÍKOVÁ NEROVNOST)

$T = \mathbb{R}$ NEBO $\mathbb{C}$, MÁME V SE $\langle -,- \rangle$.

PAK $\forall u, v \in V$: $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$.



– Dk: $\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v \rangle = \langle u,u \rangle + \langle u,v \rangle + \langle v,u \rangle + \langle v,v \rangle =$



$$\|u\|^2 + \langle u,v \rangle + \overline{\langle u,v \rangle} + \|v\|^2 =$$

$$= \|u\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\langle u,v \rangle) + \|v\|^2 \leq$$

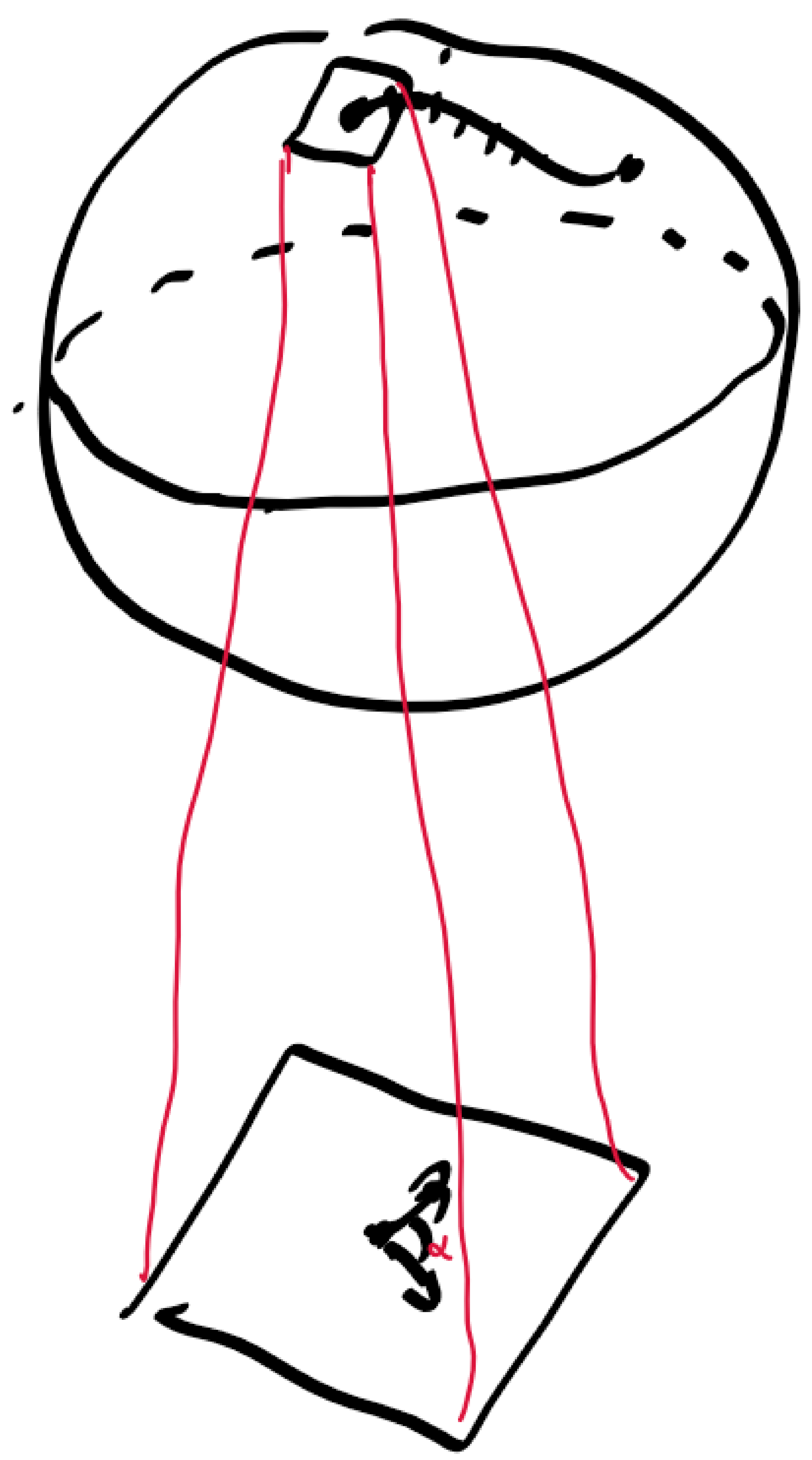
$$\leq \|u\|^2 + 2\,|\langle u,v \rangle| + \|v\|^2 \leq$$

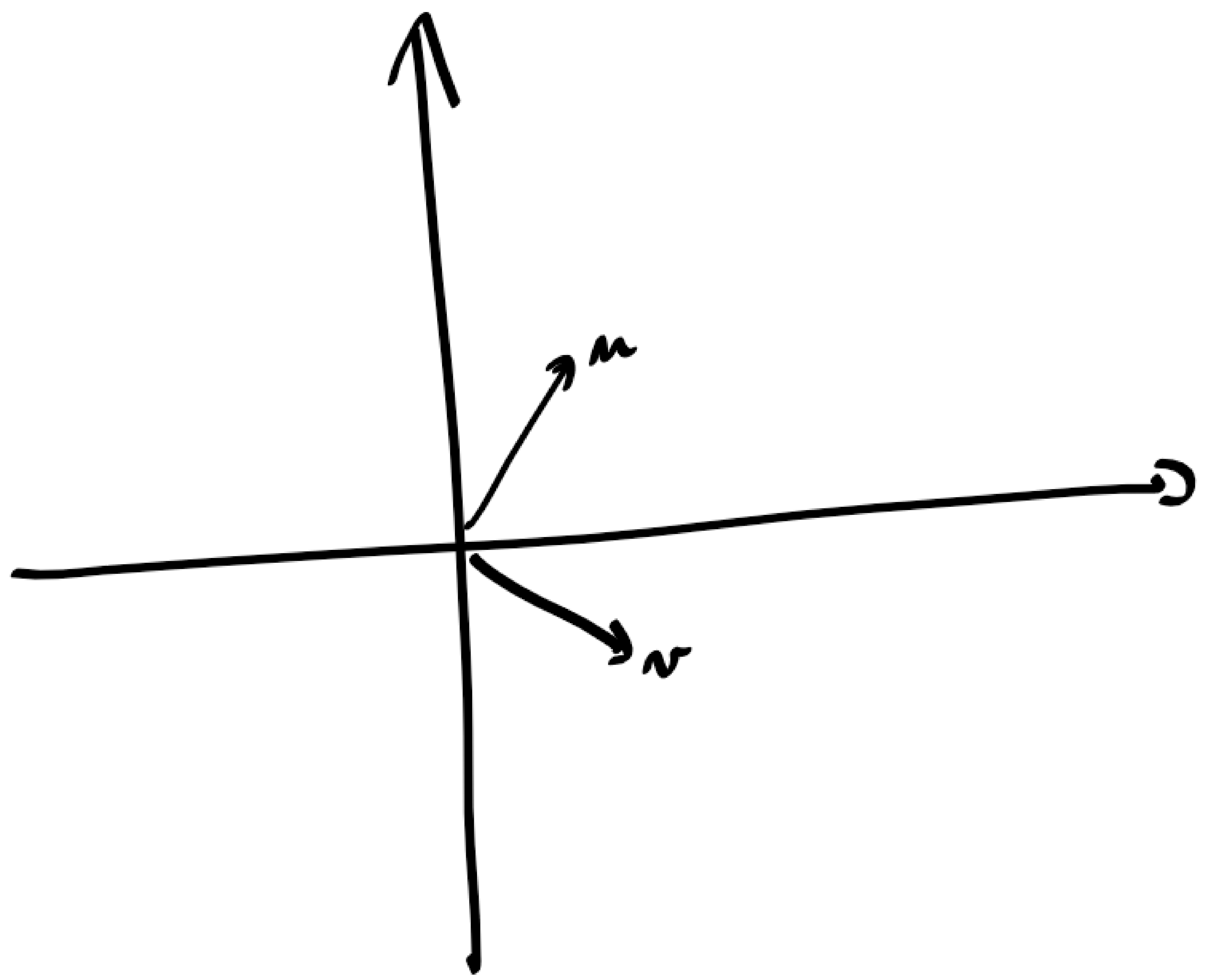
$$\leq \|u\|^2 + 2 \cdot \|u\|\,\|v\| + \|v\|^2 =$$

$$(\|u\| + \|v\|)^2.$$

– OTÁZKY PO PŘEDNÁŠCE

- SKAL. SOUČIN V GEOMETRII!





$\|u\| = \|v\| = 1$

$\langle u, v \rangle = \pm 1 \iff u = \pm v$

C.-S.: (u, v) LZ $\iff |u \cdot v| = \|u\| \cdot \|v\|$