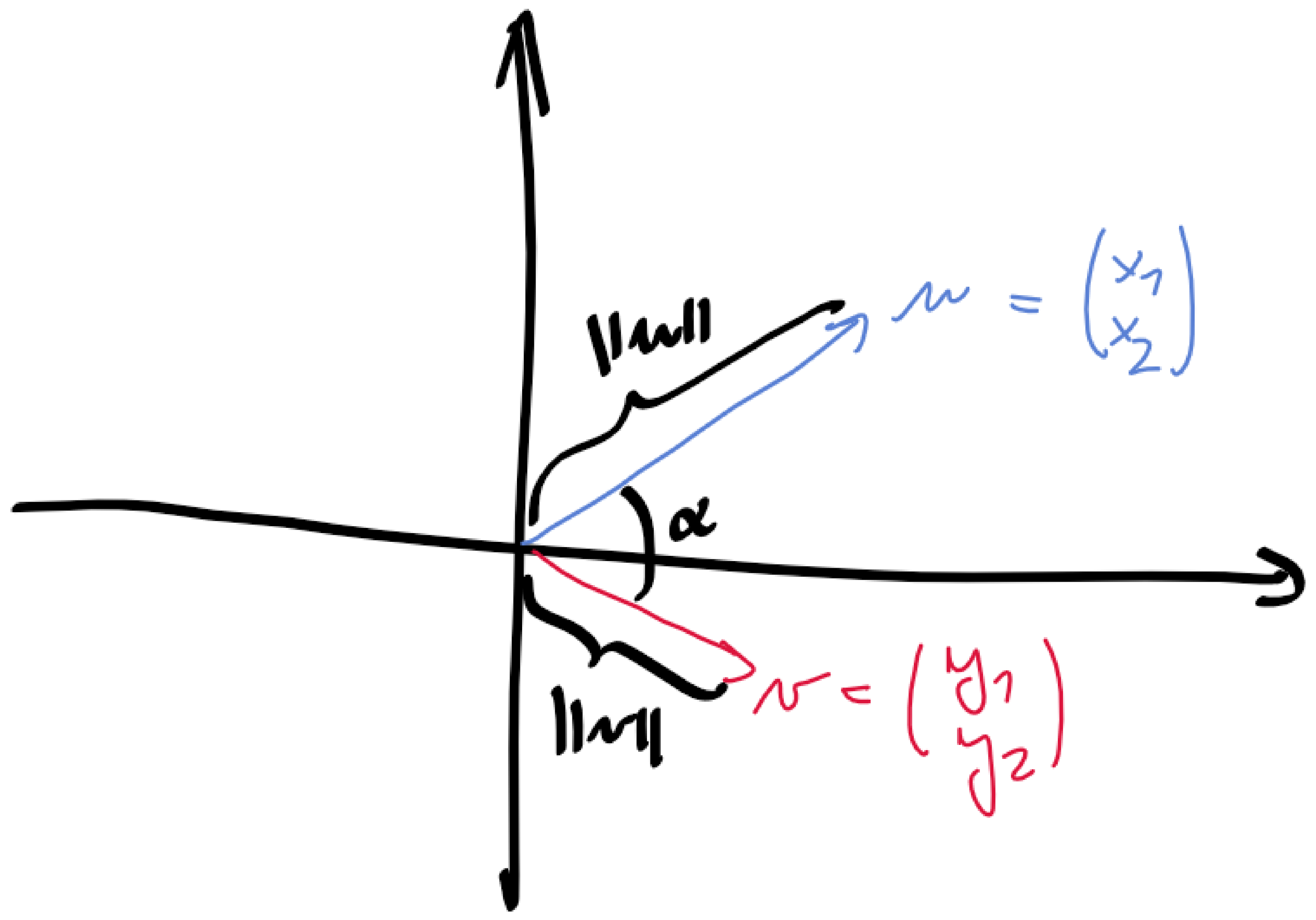
LINEÁRNÍ ALGEBRA 2

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~stovicek/index.php/cs/2021ls-nmag112

• SKALÁRNÍ SOUČIN

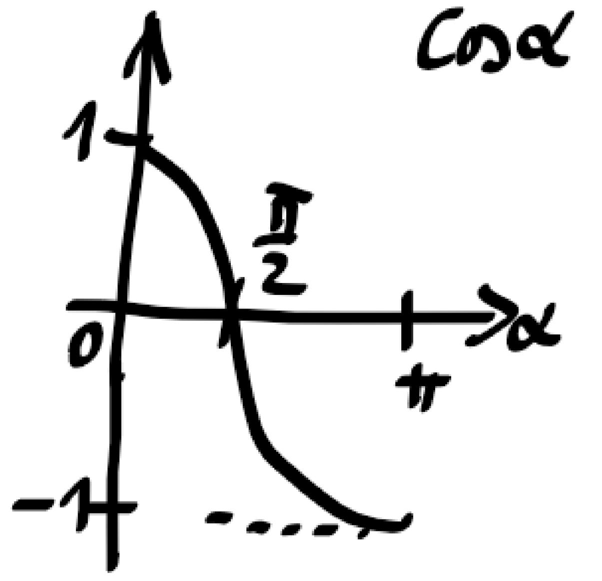
1. GEOMETRICKÝ NÁHLED V $\mathbb{R}^2$ A $\mathbb{R}^3$ (KAP. 8.1)
2. FORMÁLNÍ DEFINICE A VLASTNOSTI (KAP. 8.2)

1 SKALÁRNÍ SOUČIN V $\mathbb{R}^2$:



$$\mathbb{R} \ni u \cdot v = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos(\alpha), \quad \alpha \in \langle 0, \pi \rangle$$

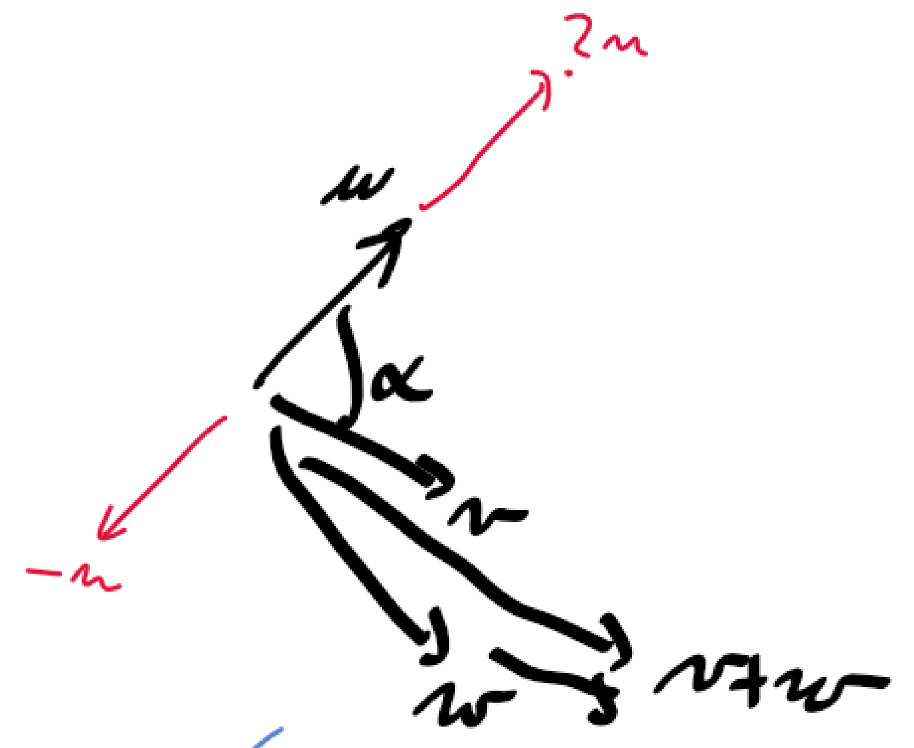
$$= x_1 \cdot y_1 + x_2 y_2$$



– ZE SKALÁRNÍHO SOUČINU UMÍME POZNAT:

- KOLMOST VEKTORŮ $(u \cdot v = 0)$
- α JE OSTRÝ, TUPÝ, PRAVÝ
- $\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$
- ÚHEL α: $\cos\alpha = \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|}$ $(u, v \neq 0)$

– INTUITIVNÍ ODVOZENÍ ROVNOSTI $\|u\|\cdot\|v\|\cdot\cos\alpha = x_1y_1+x_2y_2$



– <u>KLÍČ</u>: VLASTNOSTI ZOBRAZENÍ:

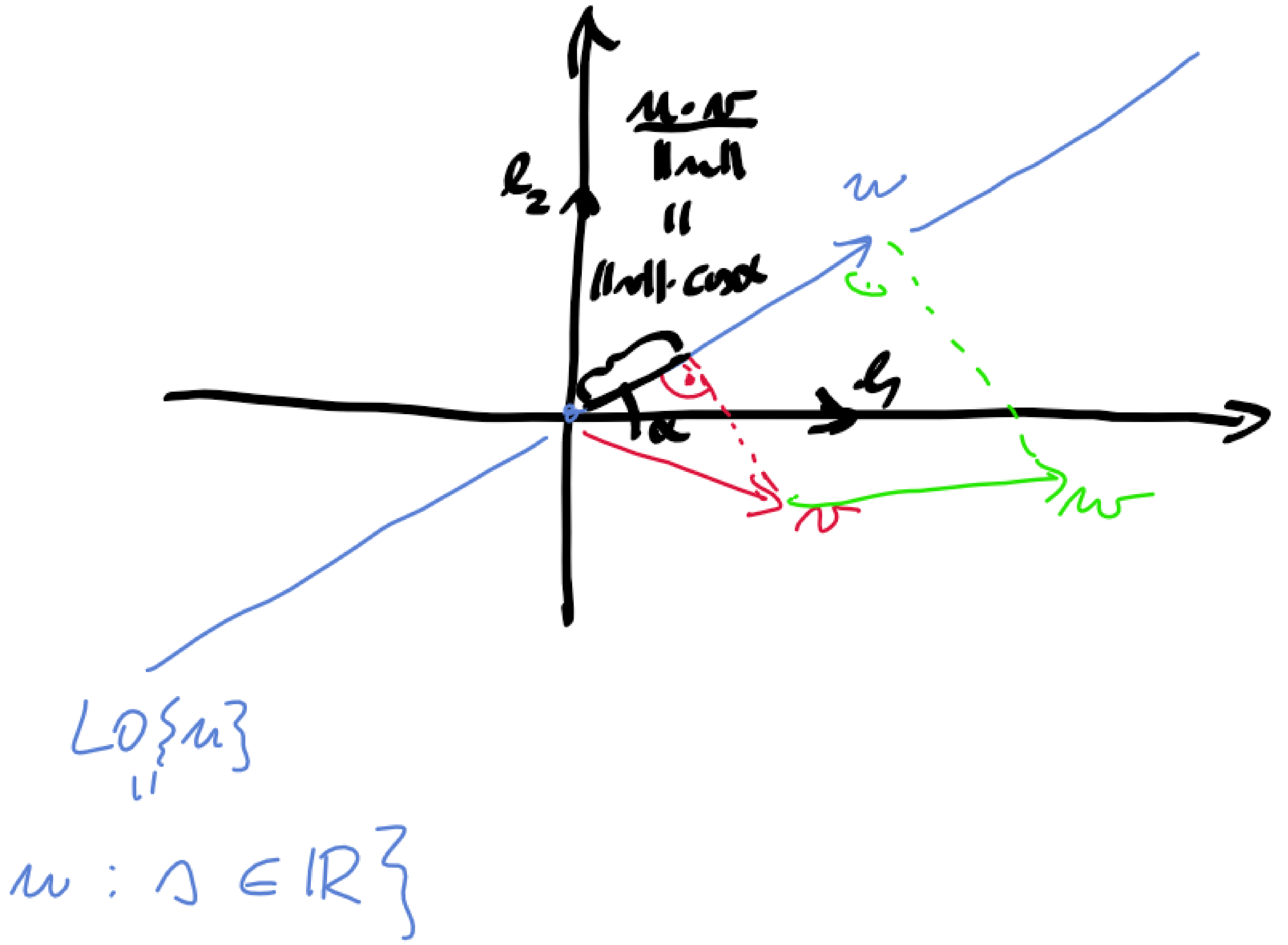
$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto u\cdot v := \|u\|\cdot\|v\|\cdot\cos\alpha \end{aligned}$$

a) $u\cdot v = v\cdot u$ (SYMETRIČNOST)

b) $u\cdot(tv) = t\,(u\cdot v)$

c) $u\cdot(v+w) = u\cdot v + u\cdot w$

(b), c): LINEARITA)



– JAK VYPADAJÍ SKALÁRNÍ SOUČINY KANONICKÝCH BÁZOVÝCH VEKTORŮ $\mathbb{R}^2$?

- e_1, e_2
- $e_1\cdot e_1 = 1$, $e_1\cdot e_2 = 0 = e_2\cdot e_1$, $e_2\cdot e_2 = 1$

– PAK TOTIŽ PRO $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ PLATÍ Z a)–c) A , ŽE

$$\begin{aligned} u\cdot v &= (x_1e_1+x_2e_2)\cdot(y_1e_1+y_2e_2) \overset{(c),(a)}{=} (x_1e_1)\cdot(y_1e_1) + (x_2e_2)\cdot(y_1e_1) + (x_1e_1)\cdot(y_2e_2) + (x_2e_2)\cdot(y_2e_2) \\ &\overset{(b),(a)}{=} x_1y_1\,(e_1\cdot e_1) + x_2y_1\,\cancel{(e_2\cdot e_1)} + x_1y_2\,\cancel{(e_1\cdot e_2)} + x_2y_2\,(e_2\cdot e_2) \\ &= x_1y_1 + x_2y_2 \end{aligned}$$

- **POZNÁMKY:**

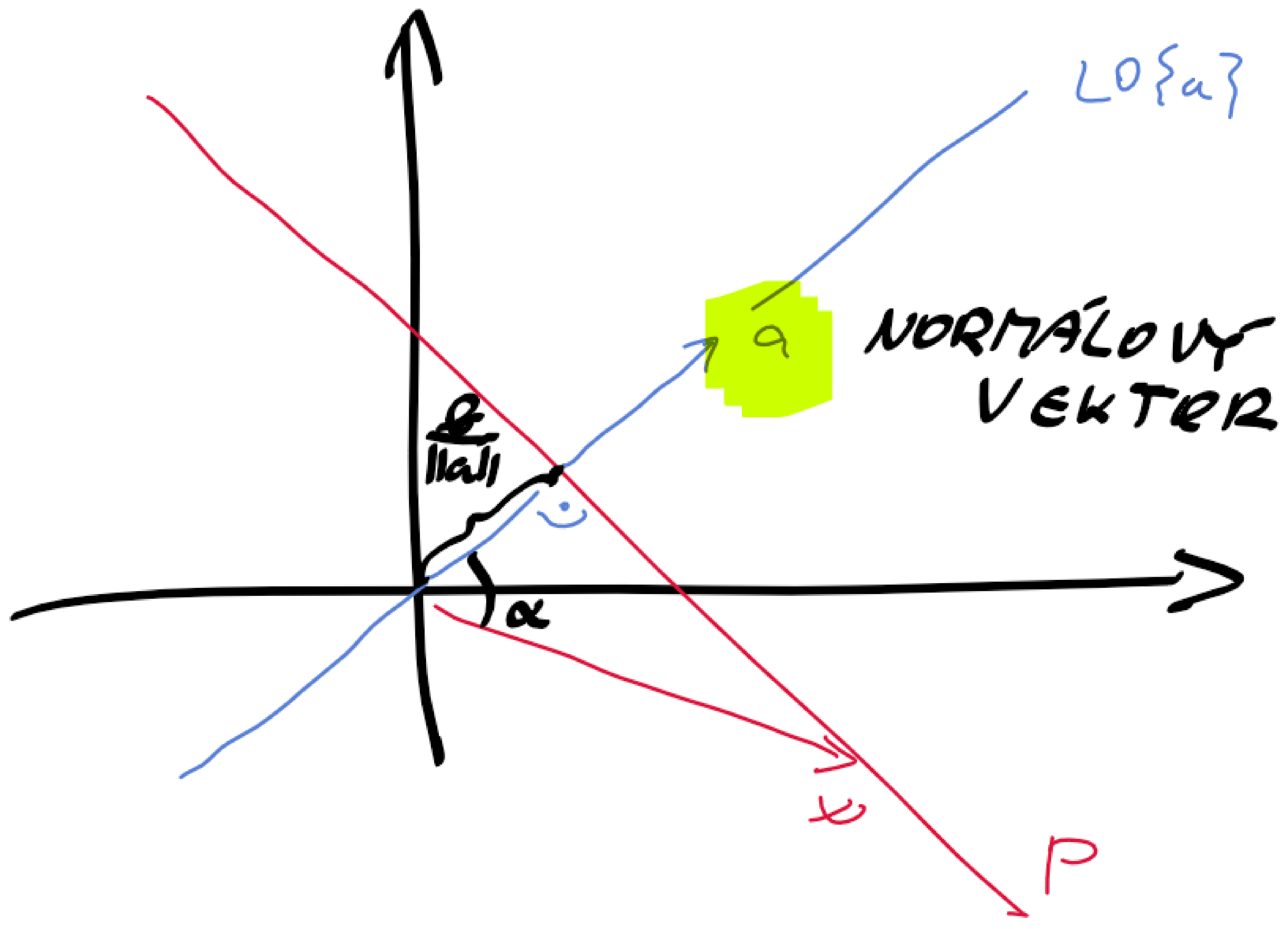
① ROVNICE PŘÍMKY V $\mathbb{R}^2$ VS. STANDARDNÍ SKALÁRNÍ SOUČIN

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : a_1 x_1 + a_2 x_2 = b \right\} \quad \Big| \quad a_1, a_2, b \in \mathbb{R}, \; a_1 \neq 0 \vee a_2 \neq 0$$

$$= \{ x \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{a \cdot x}_{\|a\| \cdot \|x\| \cdot \cos\alpha} = b \} \qquad a := \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \; x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \{ x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \cdot \cos\alpha = \frac{b}{\|a\|} \}$$

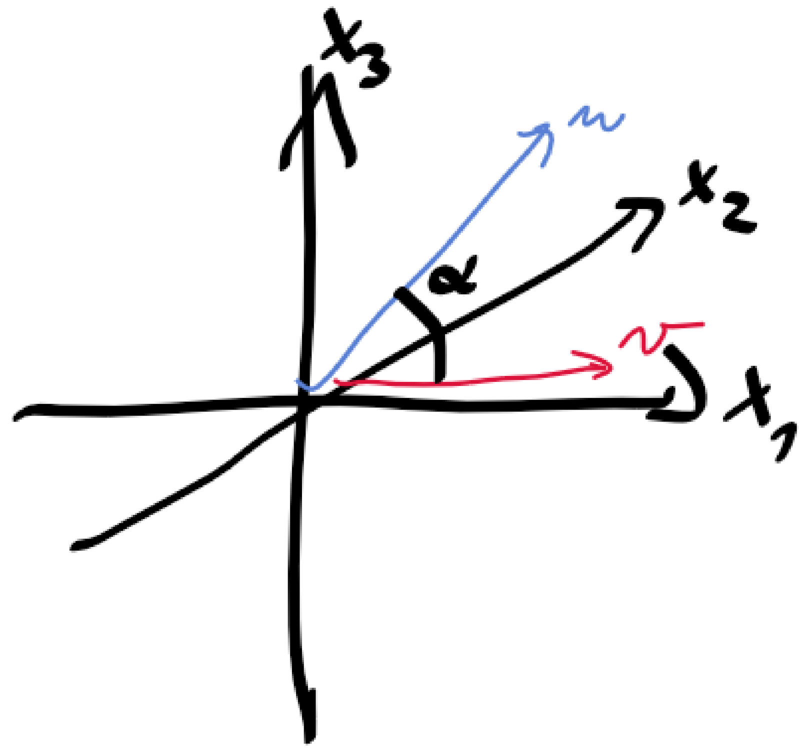
$$\frac{b}{\|a\|} = \frac{b}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$



(NORMÁLOVÝ VEKTOR P JE $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ SMĚROVÝ VEKTOR $\begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$)

---

② STADARDNÍ SKALÁRNÍ SOUČIN V $\mathbb{R}^3$



$\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$

$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \; v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$$u \cdot v = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\alpha$$
$$= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

(3) ROVNICE ROVINY V $\mathbb{R}^3$ VS STANDARDNÍ SKALÁRNÍ SOUČIN

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b \right\}$$

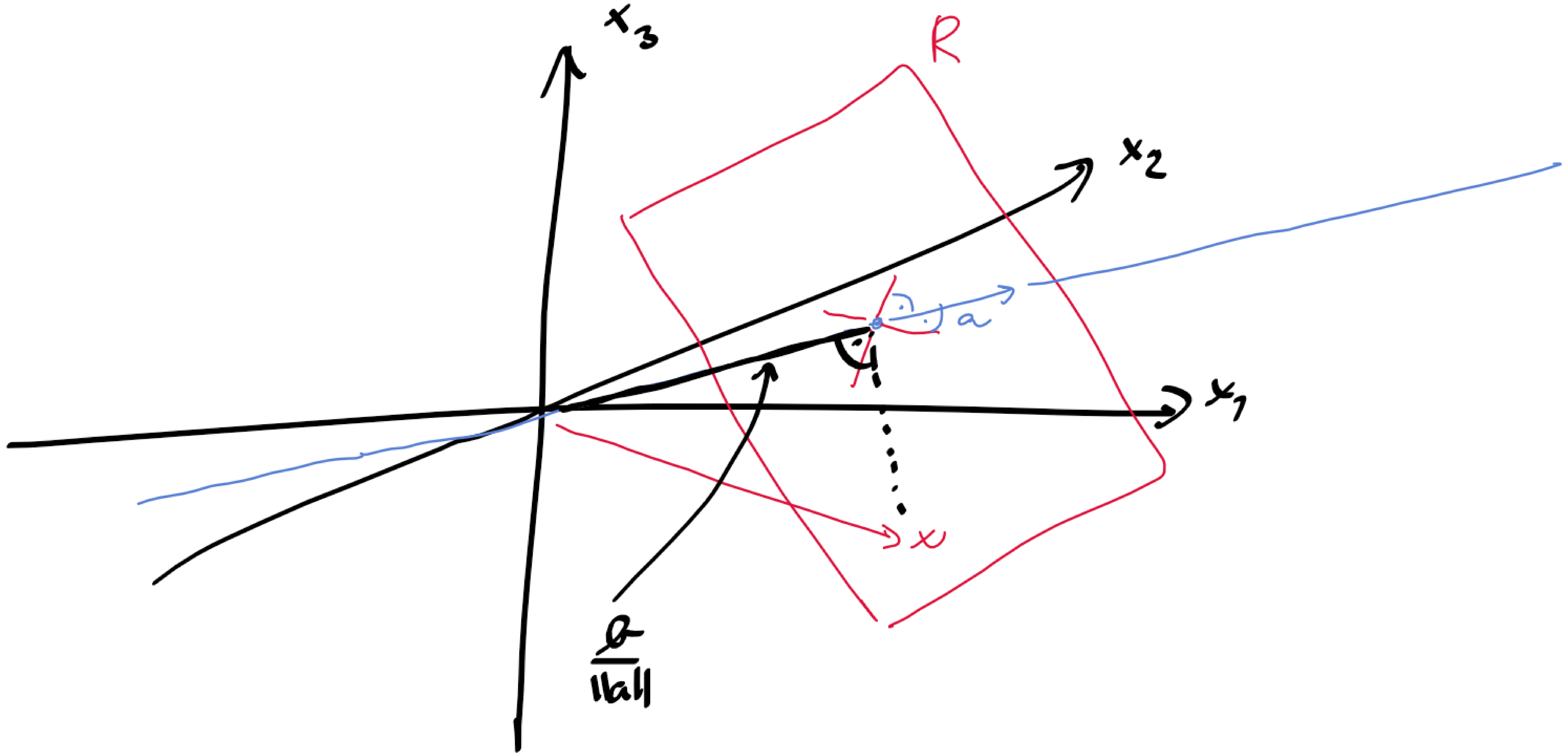
$$= \{ x \in \mathbb{R}^3 : a \cdot x = b \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \cdot \underbrace{\cos\alpha}_{\text{ÚHEL } a \text{ A } x} = \frac{b}{\|a\|} \}$$

$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$b \in \mathbb{R}$

NORMÁLOVÝ VEKTOR



– STANDARDNÍ SKALÁRNÍ SOUČIN V $\mathbb{R}^n$:

– DEF 8.4, 8.5: BUĎ $n \geq 1$, $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ AŤ JSOU VEKTORY Z $\mathbb{R}^n$.
PAK DEFINUJEME STANDARDNÍ SKALÁRNÍ SOUČIN u A v JAKO

$$u \cdot v = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \quad (\in \mathbb{R})$$

(TJ. MÁME ZOBRAZENÍ $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $(u,v) \mapsto u \cdot v$)

EUKLEIDOVSKOU NORMU VEKTORU u DEFINUJEME JAKO

$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \quad (\in \{t : t \in \mathbb{R}, t \geq 0\})$$

– T8.6: $\forall u, v, w \in \mathbb{R}^n$ $\forall t \in \mathbb{R}$ PLATÍ:

1) $u \cdot v = v \cdot u$
2) $u \cdot (tv) = t \cdot (u \cdot v)$
3) $u \cdot (v + w) = u \cdot v + w \cdot v$
4) $u \cdot u \geq 0$ A $(u \cdot u = 0 \iff u = 0)$

– POZN: $u \cdot v = \underbrace{u^T v}_{\text{MATICOVÉ NÁSOBENÍ}} = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

– STANDARDNÍ SKALÁRNÍ SOUČIN V $\mathbb{C}^n$

– **DEF 8.10**: BUĎ $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+ib_1 \\ \vdots \\ a_n+ib_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$. PAK EUKLEIDOVSKOU NORMU u DEFINUJEME JAKO

$$\|u\| = \sqrt{a_1^2+b_1^2+a_2^2+b_2^2+\dots+a_n^2+b_n^2}$$

$$= \sqrt{\underbrace{(a_1-b_1 i)}_{\overline{x_1}}\underbrace{(a_1+b_1 i)}_{x_1}+\dots+(a_n-b_n i)(a_n+b_n i)}$$

$$= \sqrt{\overline{x_1}\cdot x_1+\overline{x_2}\cdot x_2+\dots+\overline{x_n}\, x_n}$$

– POZN: $n=1$

$u = (a_1+ib_1)$

$\|u\| = |u| = \sqrt{a_1^2+b_1^2}$

$= \sqrt{(a_1-b_1 i)(a_1+b_1 i)}$

– **DEF 8.9**: BUĎTE $u, v \in \mathbb{C}^n$, $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. PAK STANDARDNÍ SKALÁRNÍ SOUČIN u A v DEFINUJEME JAKO:

$$u\cdot v = \overline{x_1}\cdot y_1+\overline{x_2}\cdot y_2+\dots+\overline{x_n}\cdot y_n \qquad \left(\text{TJ. } \|u\| = \sqrt{u\cdot u}\right)$$

– POZN: $u\cdot v = \underbrace{u^* v}_{\text{MATICOVÉ NÁSOBENÍ}} = (\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

– **DEF 8.11**: JE-LI A KOMPLEXNÍ MATICE $(a_{ij})_{m\times n}$, PAK DEFINUJEME HERMITOVSKY SDRUŽENOU MATICI K A

JAKO $A^* = (\overline{a_{ji}})_{n\times m}$

- T 8.13: $\forall u, v, w \in \mathbb{C}^n \quad \forall t \in \mathbb{C}$:

(1) $u \cdot v = \overline{v \cdot u}$

(2) $u \cdot (tv) = t\,(u \cdot v)$ A $(tu) \cdot v = \overline{t}\,(u \cdot v)$

(3) $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$ A $(u+v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$

(4) $u \cdot u$ JE NEZÁPORNÉ REÁLNÉ ČÍSLO A $(u \cdot u = 0 \Leftrightarrow u = 0)$