5. cvičení z Teorie reprezentací (14. května)

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{C}^2 & \\
\mathbb{C} \arrow[ur, "\binom{1}{0}"] & \mathbb{C} \arrow[u, "\binom{1}{0}"] \quad \mathbb{C} \arrow[u, "\binom{1}{1}"'] & \mathbb{C} \arrow[ul, "\binom{1}{x}"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[r, "\binom{1}{\mu}"] \arrow[d, "\varphi^{(1)}"'] \arrow[dr, phantom, "\cdot"] & \mathbb{C}^2 \arrow[d] \\
\mathbb{C} \arrow[r, "\binom{1}{\mu}"'] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{pmatrix} \varphi^{(0)}_{11} & \varphi^{(0)}_{12} \\ \varphi^{(0)}_{21} & \varphi^{(0)}_{22} \end{pmatrix}
$$

$$\Rightarrow \quad \rightarrow\downarrow : \begin{pmatrix} \varphi^{(0)}_{11} & \varphi^{(0)}_{12} \\ \varphi^{(0)}_{21} & \varphi^{(0)}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^{(0)}_{11} + \mu \varphi^{(0)}_{12} \\ \varphi^{(0)}_{21} + \mu \varphi^{(0)}_{22} \end{pmatrix}$$

$$\downarrow\rightarrow : \begin{pmatrix} 1 \\ \mu \end{pmatrix} \varphi^{(1)} = \begin{pmatrix} \varphi^{(1')} \\ \mu \varphi^{(1')} \end{pmatrix} \qquad \mu = 0 \qquad \mu = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\varphi^{(0)}_{21} = 0}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \varphi^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^{(0)}_{11} \\ \varphi^{(0)}_{21} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \varphi^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^{(0)}_{11} \\ \varphi^{(0)}_{21} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \varphi^{(3)} \\ \varphi^{(3)} \end{pmatrix} \overset{\mu=1}{=} \begin{pmatrix} \varphi^{(0)}_{11} + \varphi^{(0)}_{12} \\ \underbrace{\varphi^{(0)}_{21}}_{=0} + \varphi^{(0)}_{22} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \varphi^{(3)} = \varphi^{(0)}_{22}$$

$$\varphi^{(3)} = \varphi^{(0)}_{11} + \dots$$

$$b = a + \dots$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b-a \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b-a \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b - a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b-a \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zapomeneme-li na $\mathbb{C} \xrightarrow{\binom{1}{\lambda}} \mathbb{C}^2$, dostaneme, že máme endomorfismy

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b-a \\ 0 & b \end{pmatrix} \ \forall a, b \in \mathbb{C} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 - a_1 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 - a_2 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 & a_1 b_2 - a_1 \cdot + (b_1 - a_1 \\ 0 & b_1 b_2 \end{pmatrix}$$

$(V_i, \varphi_j)_{i \in Q_0, j \in Q_1}$

$\Downarrow$ jednoduchý v.p.

$\bigoplus_{i \in Q_0} V_i$ a definujeme akci tak, že šipka $e \in Q_1$ působí na $\bigoplus_{i \in Q_0} V_i$ jako $V_{s(e)} \xrightarrow{\varphi_e} V_{t(e)}$ jinde 0.

$$\begin{array}{c c} & i \\ k & \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \varphi_{e_2}\varphi_{e_1} & \end{pmatrix} \end{array}$$

$i \xrightarrow{e_1} j \xrightarrow{e_2} k$

$e_1 e_2$ vyjádříme jako matici

$a = 1, b = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$a = 0, b = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ To znamená, že ani tyto šipky $a \xrightarrow{\binom{1}{\lambda}}$, a^2 nemáme rozložitelnou ani pro zobrazení.

$\Rightarrow$ Tam stane rozložitelná i pro volbu $\lambda = 0$ a $\lambda = 1$

Dokažme $\lambda \neq 0, 1$:

$$\begin{pmatrix} \varphi^{(a)} \\ \lambda \varphi^{(a)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \lambda(b-a) \\ \lambda b \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \lambda \neq 0 \Rightarrow \varphi^{(a)} = b$

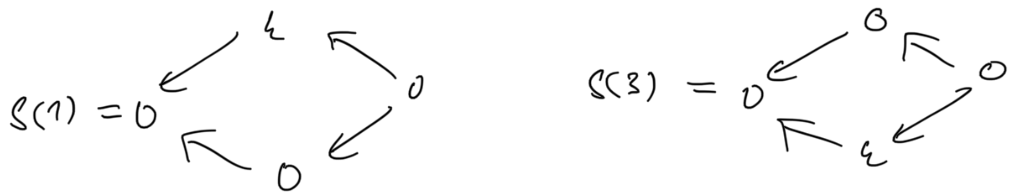
$$b = a + \lambda(b - a) \qquad \lambda \neq 1$$

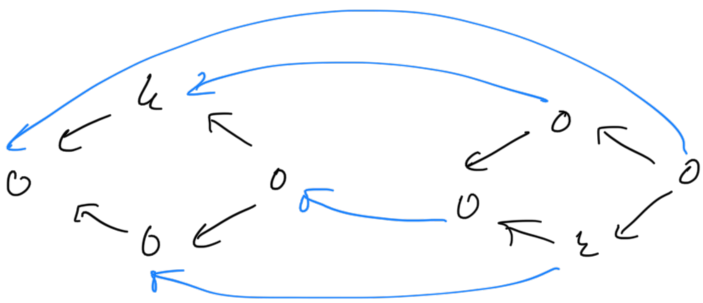
$$(1-\lambda)\, b = (1-\lambda)\, a \quad \Rightarrow \quad b = a$$

To znamená, že tato proměnná není jen triviální číslem v příkladu.

Příklady:

$$\Bbbk[t] \overset{1}{\underset{\cdot t}{\rightrightarrows}} \Bbbk[t]$$





Jako moduly jsou oba jedno-dimenzionální, ale liší se tím, jak působí prvky algebry cest, protože

r_1 na $S(1)$ působí jako identita

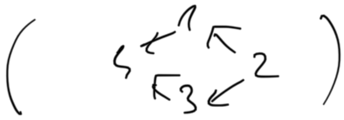
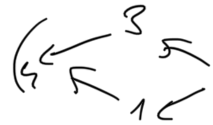
na $S(3)$ působí jako nula

Pokud bychom chtěli netriviální lineární zobrazení funkcí $S(1)$ a $S(3)$, tak nemohlo platit, že

$$f(\cdot r_1) = f(\quad)\cdot r_1$$

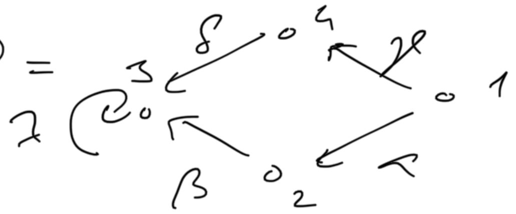
$f(s_1 \cdot r_1) = f(s_1) \neq 0$

$f(s_1) \cdot r_1 = 0$

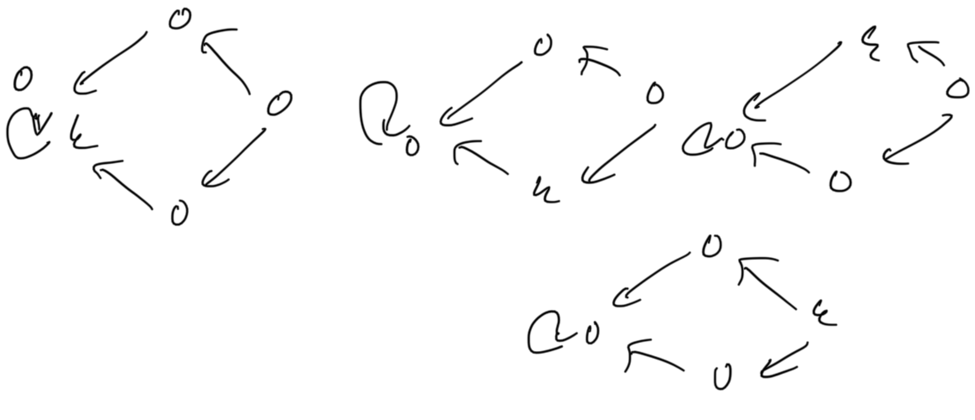
$Q =$  $Q' =$ 

$kQ \cong kQ'$, který dává ekvivalenci kategorií reprezentací

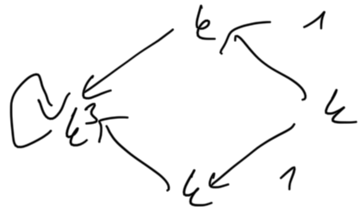
Příklad 7

$Q =$ 

svázaný relacemi $\alpha\beta = \gamma\delta$ a $\lambda^3 = 0$

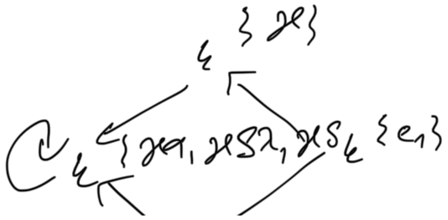


P(1):



$e_1(kQ) \cong P(1)$

→ cesty, co začínají v vrcholu 1 jedna, vrcholu i bude $k^{\#\text{cest z 1 do } i}$



$\xi^4 \alpha 1$

$x\delta \longmapsto x\delta z$

$x\delta z \longmapsto x\delta z^2$

$x\delta z^2 \longmapsto 0$ $\quad \mathcal{U}$

z

$x\delta, x\delta z, x\delta z^2$ $\quad c_1$

$= \alpha\beta$

$x\delta \quad x\delta z \quad x\delta z^2 \alpha$

$$\begin{array}{c}x\delta\\ x\delta z\\ x\delta z\end{array}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$