4. cvičení z Teorie reprezentací (30. dubna)

Příklad č. 1 Nerozložitelnost následující reprezentace:

$$\begin{tikzcd} & k \arrow[dl, "1"'] & \\ k & & k \arrow[ul, "1"'] \arrow[dl, "\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}"] \\ & k^2 \arrow[ul, "\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}"] & \end{tikzcd}$$

Definice reprezentace nad toulcem Q je

$$(V_i, \varphi_j)_{i\in Q_0,\, j\in Q_1}, \quad \varphi_j : V_{s(j)} \to V_{t(j)}$$

Lineární zobrazení z v.p. V dimenze n do v.p. W dimenze m je matice $m\times n$.

řádky sloupce

Jak vypadají jednoduché reprezentace Q?

$$\left(Q = \begin{tikzcd} & \cdot \arrow[dl] & \\ \cdot & & \cdot \arrow[ul] \arrow[dl] \\ & \cdot \arrow[ul] & \end{tikzcd} \right)$$

Když hledáme direktní rozklad / sčítance nějaké reprezentace, tak hledáme sestrojit morfismy

$$\begin{tikzcd} (V_i', \varphi_j') \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[rr, bend right, "\pi\iota = id"'] & (V_i, \varphi_j) \arrow[r, two heads, "\pi"] & (V_i', \varphi_j') \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & k \arrow[dl, "1"'] & \\ k & & k \arrow[ul, "1"'] \arrow[dl] \\ & \cdot \arrow[ul, "\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}"] & \end{tikzcd}$$

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

k^2

Podívejme se na reprezentaci generovanou nenulovým prvkem v

násobením γ dostaneme celý podprostor v,
násobením $\gamma\delta$ dostaneme celý podprostor
násobením α dostaneme 1-dim podprostor v

To znamená, že ta reprezentace generovaná ___ je rovna

$$\begin{tikzcd}
& k \arrow[dl, "1"'] & \\
k & & k \arrow[ul, "1"'] \arrow[dl, "1"] \\
& k \arrow[ul, "0"] &
\end{tikzcd}$$

Lze jí dostat direktní rozklad odpovídající reprezentace

$$k^2 \xrightarrow{(1\ 0)} k$$

$$(k \xrightarrow{1} k) \oplus (k \longrightarrow 0)$$

$$\begin{tikzcd}
k \arrow[r, "1"] & k \\
k^2 \arrow[u, "(1\ 0)"] \arrow[r, "(1\ 0)"] & k \arrow[u, "1"'] \\
k \arrow[u, "\binom{1}{0}"] \arrow[r] \arrow[uu, bend left=60, "1"] & k \arrow[u, "1"'] \arrow[uu, bend right=60, "1"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& k^3 \arrow[dl, "1"'] & \\
k & & k \arrow[ul, "1"']
\end{tikzcd}$$

δ γ 4 1

$$\begin{tikzcd} & \overset{2}{\mathbb{k}^2} & \\ \overset{\beta}{} \arrow[ur, "(0\ 1)"] & & \arrow[ul, "\binom{1}{0}"'] \overset{\alpha}{} \end{tikzcd}$$

Hledáme endomorfismy vektorových prostorů ve vrcholech, které jsou kompatibilní se zobrazeními v šipkách.

$$\begin{tikzcd} \overset{1}{\mathbb{k}} \arrow[r, "1"] \arrow[d, "\varphi_1"'] \arrow[dr, phantom, "\circ"] & \overset{3}{\mathbb{k}} \arrow[d, "\varphi_2"] \\ \underset{1}{\mathbb{k}} \arrow[r, "1"] & \underset{3}{\mathbb{k}} \end{tikzcd}$$

z komutativity diagramu $\Rightarrow$

$\varphi_1 = \varphi_2$

Stejně to dostaneme pro diagram $\begin{tikzcd} 3 \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & 4 \arrow[d] \\ 3 \arrow[r, "\delta"] & 4 \end{tikzcd}$

To znamená, že každý endomorfismus této reprezentace je ve vrcholech 1, 3, 4 zadán stejným zobrazením.

$$\begin{tikzcd} \overset{1}{\mathbb{k}} \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, "\varphi^{(1)}"'] \arrow[dr, phantom, "\circ"] & \overset{2}{\mathbb{k}^2} \arrow[d, "\begin{pmatrix} \varphi^{(2)}_{11} & \varphi^{(2)}_{12} \\ \varphi^{(2)}_{21} & \varphi^{(2)}_{22} \end{pmatrix}"] \\ \underset{1}{\mathbb{k}} \arrow[r, "\binom{1}{0}"'] & \underset{2}{\mathbb{k}^2} \end{tikzcd}$$

$$\begin{pmatrix} \varphi^{(2)}_{11} & \varphi^{(2)}_{12} \\ \varphi^{(2)}_{21} & \varphi^{(2)}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^{(2)}_{11} \\ \varphi^{(2)}_{21} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \end{pmatrix} \varphi^{(1)} = \begin{pmatrix} \varphi^{(1)} \\ \end{pmatrix}$$

$$(0)\,\varphi \quad = \quad (0 \quad)$$

$$\Longrightarrow \quad \varphi_{11}^{(2)} = \varphi^{(1)} \quad \text{a} \quad \varphi_{21}^{(2)} = 0$$

$$\begin{tikzcd}
k^2 \arrow[r, "(0\ 1)"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} \varphi^{(1)} & \varphi_{12}^{(2)} \\ 0 & \varphi_{22}^{(2)} \end{pmatrix}"'] \arrow[dr, phantom, "\circ"] & k \arrow[d, "\varphi^{(1)}"] \\
k^2 \arrow[r, "(0\ 1)"'] & k
\end{tikzcd} \quad \Longrightarrow$$

$$\varphi^{(1)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varphi^{(1)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^{(1)} & \varphi_{12}^{(2)} \\ 0 & \varphi_{22}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varphi_{22}^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \varphi_{22}^{(2)} = \varphi^{(1)}$$

Matice u 2 je tvaru

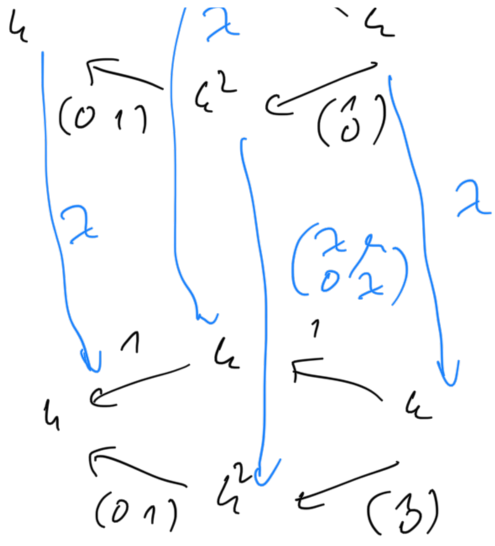
$$\begin{pmatrix} \varphi^{(1)} & \varphi_{12}^{(2)} \\ 0 & \varphi^{(1)} \end{pmatrix}$$

Tvrdím, že

$$\mathrm{End}_{kQ}(-) \cong \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},\ \lambda \in k,\ \mu \in k \right.$$

My víme, že každý endomorfismus

$$1 \quad k \quad 1$$



$\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

Tvrdím, že

$$(\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \varphi^{(3)}, \varphi^{(4)}) \longmapsto \varphi^{(2)}$$

je isomorfismus.

Kompatibilita s násobením:

Mějme $\left(\lambda_1, \begin{pmatrix}\lambda_1 & \mu_1 \\ 0 & \lambda_1\end{pmatrix}, \lambda_1, \lambda_1\right)$ a

$\left(\lambda_2, \begin{pmatrix}\lambda_2 & \mu_2 \\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}, \lambda_2, \lambda_2\right)$. Jejich složení

$$\left(\lambda_2 \cdot \lambda_1, \begin{pmatrix}\lambda_2 & \mu_2 \\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & \mu_1 \\ 0 & \lambda_1\end{pmatrix}, \lambda_2 \cdot \lambda_1, \lambda_2 \cdot \lambda_1\right)$$

$$= \left(\lambda_2\lambda_1, \begin{pmatrix}\lambda_2\lambda_1 & \lambda_2\mu_1 + \mu_2\lambda_1 \\ 0 & \lambda_2\lambda_1\end{pmatrix}, \lambda_2\lambda_1, \lambda_2\lambda_1\right)$$

Zbývá si uvědomit, že

$$\left\{\begin{pmatrix}\lambda & \mu \\ 0 & \lambda\end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{C}\right\}$$

lokální algebra. Víme, že je to algebra [illegible].

Příklad 2

$$\underbrace{\bullet \quad \bullet \quad \cdots \quad \bullet}_{n}$$

Ad (i)

Trojúhelníkové matice: $E_{ij} = i\begin{pmatrix} \cdots & \overset{j}{1} \end{pmatrix}$ v řádku, jinde nuly. Platí, že $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk} \cdot E_{il}$

$v_0 \longmapsto E_{11}$

$v_i \longmapsto E_{(i+1)(i+1)}$

$\alpha_{i \to 0} \longmapsto E_{(i+1)1}$

pomocí si ověříme kompatibilitu s relacemi

Ad (ii)

$$\begin{tikzcd} & V_0 & \\ V_1 \arrow[ur, "\varphi_1"] & \cdots & V_n \arrow[ul, "\varphi_n"'] \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ jádra $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, doplněk vektorového prostoru generovaného obrazy $\operatorname{Im}\varphi_1, \dots, \operatorname{Im}\varphi_n$ a zbytek

Úplný rozklad homomorfismu

$$V \xrightarrow{\varphi} W$$

$$(\operatorname{Ker}\varphi \longrightarrow 0) \oplus (\operatorname{Im}\varphi \xrightarrow{1} \operatorname{Im}\varphi) \oplus (0 \longrightarrow W/\operatorname{Im}\varphi)$$

Příklad 3 Pro jaká $\lambda \in k$ je nerozložitelné?

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r, "\binom{1}{0}"] & k^2 & k \arrow[l, "\binom{1}{\lambda}"'] \\ & \arrow[u] & k \arrow[ul, "\binom{1}{1}"'] \end{tikzcd}$$