3. cvičení z Teorie reprezentací (16. dubna 2021)

Příklad 1:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \lambda & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \lambda \end{pmatrix} ; \ \lambda, \alpha_{21}, \alpha_{31}, \alpha_{32} \in k \right\}$$

(i) ✓ (B je k-algebra)

(ii) B je lokální

prvek B je invertibilní $\Leftrightarrow \lambda \neq 0$

Lemma 4.6 v I.4 [ASS]

B je lokální $\Leftrightarrow \forall b \in B$: b nebo $1-b$ je invertibilní

Příklady 2–4:

Př 2: Každá konečně dimenzionální komutativní algebra nad k je direktním součinem lokálních konečně dimenzionálních komutativních algeber nad k.

Potřebujeme I.4 v [ASS].
e centrální
eA je to stejné jako Ae

je-li e centrální idempotent, tak eA má strukturu algebry
$(ea)(ea') =$
$= e^2aa' = eaa'$

Př 3: $k[t]$ ✓

Př 4: Podle Def. 5.7 v I.5 [ASS] je projektivní pokrytí $h: P \longrightarrow M$, že $\ker h$ je nadbytečný v projektivním modulu P.

$N \subseteq M$ je nadbytečný, pokud $\forall L \subseteq M$, $L+N$. $L = M$

Hledáme projektivní pokrytí

$$P \xrightarrow{h} k[t]/(t^3)$$

π

$$\begin{tikzcd} & \\ f \arrow[r, dotted] & k[t] \arrow[from=u, "\pi_I"] \end{tikzcd}$$

Z projektivity $k[t]$ dostaneme f, že $\pi_I = \ell f$. To znamená, že $P = \operatorname{Im} f + \ker \ell$. My předpokládáme, že $\ker \ell$ je nadbytečný podmodul, tedy $\operatorname{Im} f = P$. Ale P je projektivní, tedy P musí být direktní sumand v $k[t]$, tedy $P = k[t]$ a f je iso.

Tak hned už stačí dokázat, že

$$k[t] \twoheadrightarrow k[t]/(t^3)$$

nemá projektivní pokrytí.

$$(t^3) + (1 - t^3) = k[t]$$

Příklady 10 a 11:

Př 10: $Q = \begin{tikzcd} e_0 \arrow[loop above, "\alpha"] \arrow[loop right, "\beta"] \end{tikzcd}$

$$kQ \xrightarrow{f} B$$

$$e_0 \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

B má jako v.p. nad k bázi $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$\underset{f(\beta)}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \underset{f(\alpha)}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$