2. cvičení z Teorie reprezentací (26. března 2021)

Příklad č. 5 : Implikace (i) $\Rightarrow$ (ii):

$$End_R(R_R) \cong R$$

$End(R_R)$, víme, že $R_R \cong \bigoplus_{i\in I} S_i$, S_i jednoduché R-moduly

Takových jednoduchých modulů je konečně mnoho. Tím pádem můžeme psát

$$R_R \cong \bigoplus_{i=1}^{n} S_i^{(m_i)} \qquad S_i \cong S_j \Leftrightarrow i=j$$

Spočítáme $End_R(R_R)$

$$\cong Hom_R\left(\bigoplus_{i=1}^{n} S_i^{(m_i)}, \bigoplus_{i=1}^{n} S_i^{(m_i)}\right) \cong$$

$$\cong \prod_{i,j} Hom_R\left(S_i^{(m_i)}, S_j^{(m_j)}\right)$$

Použijeme cvičení 2:

$$Hom_R\left(S_i^{(m_i)}, S_j^{(m_j)}\right) \overset{i\neq j}{=} 0$$

$$\cong \prod_{i=1}^{n} End_R\left(S_i^{(m_i)}\right) \cong \prod_{i=1}^{n} M_{m_i}(D_i)$$

z cvičení víme, že $End_R(S_i) \cong D_i$, D_i je division ring (ne nutně komutativní těleso)

Příklad č. 7 :

(i) M/M' je jednoduchý pro $M' \subseteq_{max} M$

(ii) maximální podmoduly v $M \oplus N$ jsou tvaru $M' \oplus N$, maximální $M' \subseteq M$, nebo naopak.

(iii) $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\pi_{N'}} N/N'$ jednoduchý

$N' \subseteq_{max} N$

Podle (i), $m \in \operatorname{rad} M$, potom $\pi_{N'} f(m)$

$= 0$, $\pi_{N'}(f(m)) = 0 \quad \forall N' \subseteq_{max} N$

$\Rightarrow f(m) \in$

(iv) $M \cdot \operatorname{rad} R \subseteq \operatorname{rad} M$

$m \in M$, $f_m : R \longrightarrow M$

$1 \longmapsto m$

$r \longmapsto m \cdot r$

aplikací (iii)

$f_m(\operatorname{rad} R) \subseteq \operatorname{rad} M$

$= m \cdot r$, $r \in \operatorname{rad} R$

$\operatorname{rad} M \subseteq M \cdot \operatorname{rad} R$

Uvážíme $M / M \cdot \operatorname{rad} R$. Toto je speciální modul nad $R/\operatorname{rad} R$ – ale R je konečně dimenzionální nad k, použitím PT6 dokážeme že $R/\operatorname{rad}(R)$ je pologjednoduchý ($\operatorname{rad}(R/\operatorname{rad} R) = 0$).

$M / M \operatorname{rad} R$ je potom direktní sumou jednoduchých (PT) modulů, aplikací (ii) dokážeme, že rad nulový radikál.

To znamená, že $\operatorname{rad} M \subseteq M \cdot \operatorname{rad} Z$.

(v) Predpokladajme naviac, že M je konečnegenerovaný modul.

<u>Pr 8</u>:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads] & N \arrow[d, two heads, "\pi_{\operatorname{rad} N}"] \\
M/\operatorname{rad} M \arrow[r, dotted] & N/\operatorname{rad} N
\end{tikzcd}$$

$f(\operatorname{rad} M) \subseteq \operatorname{rad} N$

podľa vety o homomorfizme