1. cvičení z Teorie reprezentací (12. března 2021)

Exercise 1:

Ad (i): Máme $M \in \mathrm{Mod}\text{-}R$ a $(N_i)_{i \in I}$ systém podmodulů M, potom $M \cong \bigoplus_{i \in I} N_i$, právě když platí, že:

(i) $\sum_{i \in I} N_i = M$

(ii) Pro každé $i \in I$

$$N_i \cap \Big(\sum_{j \in I \setminus \{i\}} N_j \Big) = 0$$

Máme nějaký (vůči inkluzi) max. systém $\mathcal{S}$ jednoduchých podmodulů M, že $\mathcal{S}$ splňuje (ii).

Předpokládáme, že je $m \in M$, že $m \notin \sum_{S \in \mathcal{S}} S$.

My víme, že $\mathrm{soc}(M) = M$. To znamená, že máme nějaké jednoduché podmoduly $S_1, \dots, S_n$, že $m \in \sum_{i=1}^{n} S_i$.

$A \xrightarrow{\varphi} B$ $\quad \varphi$ je epi (kategoriální), když pro libovolné $\psi_1 : B \to C$, $\psi_2 : B \to C$, že $\psi_1 \varphi = \psi_2 \varphi \Rightarrow \psi_1 = \psi_2$

Je-li $S \in \mathrm{Mod}\text{-}R$ jednoduchý modul, co je potom

$$\mathrm{End}_R(S_R) = ?$$

Co to je za alg. strukturu?

v $\mathrm{End}_R(S_R)$ můžeme morfismy sčítat, ale i skládat (násobit). Ex 2(iii): nám dává, že $f \in \mathrm{End}_R(S_R)$, $f \neq 0$ má inverzi.

$\Rightarrow$ Okruh je to vlastně těleso
(v angl. literatuře DIVISION RING)

Kroneckerova algebra: $\to$ lokální (2-dim) modul nad k. alg.

$$\begin{pmatrix} k & k \oplus k \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

v [ASS] kap. I, př. 2.

algebra cest:

$$\bullet \rightrightarrows \bullet$$

R ... fin. dim. alg. over k alg. closed field

S ... je jednoduchý modul nad R,

S je cyklický (generovaný jedním prvkem)

Takže máme:

$$R \xrightarrow{f} S, \quad f \text{ je } R\text{-homomorfismus}$$

Tedy speciálně S je fin. dim. vektorový prostor nad k.

Vezmeme $g \neq 0 \in \mathrm{End}_R(S)$,

podíváme se na:

$0 \neq v \in S$:

pro $s \neq 0 \in S$:

$$s,\ g(s),\ g^2(s),\ g^3(s),\ \dots \quad \leftarrow$$

$$\neq 0 \qquad \neq 0 \qquad \neq 0$$

S je fin. dim. nad k, tedy máme $n \in \mathbb{N}$ a $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in k$:

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i g^i(s) = 0 \quad \leftarrow$$

libovolné $s' \in S$: $s \cdot r$, $r \in R$

$$\rightarrow \quad \sum_{i=0}^{n} \lambda_i g^i(s \cdot r) = \left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i g^i(s) \right) \cdot r = 0$$

$\rightarrow$ v $\mathrm{End}_R(S)$:

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i g^i = 0$$

---

axiomy pro pravý modul M nad R je, že $\forall m \in M$ $\forall r, s \in R$:

$$m \cdot (r + s) = m \cdot r + m \cdot s$$

$\mathrm{End}_R(S)$ je také k-algebra, $\mathrm{End}_R(S)$ je „nekomutativní" nadtěleso k tím pádem.

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i g^i = 0$$

$$\Rightarrow \delta \leftarrow'$$

ℓ

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i g^i = 0$$