ALGEBRA I (NMAG 201) – VZOROVÝ TEST

Jméno:

Tvrzení a definice pečlivě formulujte včetně všech předpokladů. Pište text stejně formálně, jako je psán ve skriptech. Odpovědi na otázky zdůvodněte. Pokud používáte nějaké netriviální tvrzení z přednášky, uveďte explicitně odkaz (často budete vyzváni, abyste všechna použitá tvrzení zformulovali). Časový limit je 120 minut.

1. (10 bodů) Spočtěte $3^{5^{7^9}}$ mod 21. Formulujte tvrzení, která používáte.

2. (15 bodů) Uvažujte polynom $x^3-3x+5 \in \mathbb{Q}[x]$. Nejprve ověřte, že nemá vícenásobné kořeny. Označme tyto tři kořeny $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{C}$. Nyní přesně spočtěte součin $\prod_{i<j}(u_i+u_j)$ a výpočet zdůvodněte.

Jméno:

3. (20 bodů) Definujte pojem podokruhu s jednotkou a ideálu v daném oboru integrity $\mathbf{R}$. Rozhodněte, zda

(a) množina $\{f \in \mathbb{Q}[x] \mid f(0) \in \mathbb{Z}\}$ tvoří podokruh či ideál v oboru $\mathbb{Q}[x]$,
(b) množina $\{\sum a_i x^i \in \mathbb{Z}[x] \mid 2 \text{ dělí } \sum a_i\}$ tvoří podokruh či ideál v oboru $\mathbb{Z}[x]$.
(c) množina symetrických polynomů tvoří podokruh či ideál v oboru $\mathbb{Z}[x, y, z]$.

4. (20 bodů)

(a) Lze v oboru $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ každý nenulový neinvertibilní prvek rozložit na součin ireducibilních prvků? Svoji odpověď dokažte. Použít můžete vlastnosti normy, dělení se zbytkem, Eukleidův algoritmus. Pokud chcete použít jinou abstraktní větu, dokažte ji.

(b) Rozložte $(10 + 4i\sqrt{2})$ v oboru $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$, nebo zdůvodněte, proč to nejde.

Jméno:

5. (20 bodů)

(a) Napište nějaké těleso s 125 prvky, popište jej jako faktorokruh $T[\alpha]/(f)$ pro vhodné T, f. Popište explicitně, co jsou jeho prvky a jak jsou definovány operace.

(b) Spočtěte α^{-3}.