ALGEBRA I (NMAG 201) – DOMÁCÍ ÚLOHY 6

Termín odevzdání: 6. 1. 2020 do 12:10 hod.

(1) Rozhodněte, které z následujících ideálů jsou hlavní:
   (a) $I = 2019 \cdot \mathbb{Z} + 12 \cdot \mathbb{Z}$ v okruhu celých čísel,
   (b) $I = (1+\sqrt{5})R + 2R$ v okruhu $R = \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$,
   (c) $I = (x^{2019} - 1)R + (x^{12} - 1)R$ v okruhu $R = \mathbb{Z}[x]$,
   (d) $I = xR + yR$ v okruhu $\mathbb{Q}[x, y]$.

   U hlavních ideálů I navíc určete prvek $a \in R$ takový, že $I = aR$. Odpovědi zdůvodněte.

   (5 bodů)

(2) Najděte nerozložitelný rozklad polynomu $10x^3 + 5x^2 + 10x + 5$ v oborech integrity $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{Z}[x]$ a $T[x]$, kde $T = \mathbb{Z}_3[\alpha]/(\alpha^2 - \alpha - 1)$ je devítiprvkové těleso. Odpovědi zdůvodněte.

   (5 bodů)

(3) Rozložte prvek 29 na součin ireducibilních prvků v $\mathbb{Z}[i]$ a v $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$. Výsledek odůvodněte.

   Poznámka pro zvídavé (k vyřešení úkolu není potřeba): Obor integrity $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ je kupodivu opět eukleidovský s nám známou normou $\nu(a + b\sqrt{7}) = |a^2 - 7b^2|$. Jenom dělení se zbytkem je trochu komplikovanější. Nestačí jen vydělit čísla v tělese $\mathbb{Q}[\sqrt{7}]$ a zaokrouhlit koeficienty, může být navíc potřeba koeficienty podílu upravit o 1, aby norma zbytku vyšla menší než norma dělitele.

   (5 bodů)