ALGEBRA I (NMAG 201) – DOMÁCÍ ÚLOHY 2

Termín odevzdání: 4. 11. 2019 do 12:10 hod.

(1) Buď $m, n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že $x^m - 1 \mid x^n - 1$ v $\mathbb{Z}[x]$ právě tehdy, když $m \mid n$. Návod: dělte se zbytkem.
(5 bodů)

(2) (a) Dělte polynom $f := x^4 + x^3 + 2x^2 + 4x - 2$ se zbytkem polynomem $g := x^2 - x + 1$ v oborech $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Z}_3[x]$ a $\mathbb{Z}_5[x]$.
(b) Uvažujte předchozí problém pro polynomy nad libovolným oborem integrity R. Jakou přesně podmínku musí R splňovat, aby g dělil (jakožto polynom v $R[x]$) polynom f beze zbytku?
(5 bodů)

(3) Spočítejte největší společný dělitel polynomů $f := x^3 + x^2 - 2x$ a $g := x^3 - x^2 - x + 1$ v oborech $\mathbb{R}[x]$ a $\mathbb{Z}_3[x]$. Vyjádřete největší společný dělitel v obou případech pomocí Bézoutových koeficientů.
(5 bodů)