

ALGEBRA 2 (NMAG 202) – VZOROVÝ TEST

Jméno:

Tvrzení a definice pečlivě formulujte včetně všech předpokladů. Pište text stejně formálně, jako je psán ve skriptech. Odpovědi na otázky zdůvodněte. Pokud používáte nějaké netriviální tvrzení z přednášky, uveďte explicitně odkaz (často budete vyzváni, abyste všechna použitá tvrzení zformulovali). Časový limit je 120 minut.

1. (15 bodů) Určete, kolik prvků kterého řádu mají grupy S_4 , A_5 a D_{16} . Které z těchto grup jsou abelovské? Které řešitelné a jakého stupně?

2. (15 bodů) Spočítejte stupeň $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}) : \mathbb{Q}]$ a najděte nějakou bázi vektorového prostoru $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}+\sqrt{3})$ nad tělesem \mathbb{Q} . Formulujte věty, které používáte.

Jméno:

3. (15 bodů) Kolika způsoby lze obarvit stěny krychle k různými barvami? Dvě obarvení považujeme za totožná, pokud se liší otočením krychle.

4. (20 bodů) Kolik podgrup má multiplikativní grupa R^* okruhu $R = \mathbb{Z}_3[x]/(x^3 - x + 1)$? Kolik existuje homomorfismů $R^* \rightarrow \mathbb{Z}_n$ v závislosti na n ? Jak velké mají tyto homomorfismy jádra a obrazy? Uveďte všechny věty, které používáte.

Jméno:

5. (20 bodů) Určete stupeň rozkladového nadtělesa polynomu $f = x^4 - x^2 - 2$ nad \mathbb{Q} . Určete, kolik prvků má Galoisova grupa $\mathbf{Gal}(f/\mathbb{Q})$ a popište její jednotlivé prvky (tj. jak působí na rozkladovém nadtělese f). Je tato grupa abelovská? Je řešitelná?