

ALGEBRA 2 (NMAG 202) – TEST 21. 9. 2020

**Jméno:**

Tvrzení a definice pečlivě formulujte včetně všech předpokladů. Pište text stejně formálně, jako je psán ve skriptech. Odpovědi na otázky zdůvodněte. Pokud používáte nějaké netriviální tvrzení z přednášky, uveďte explicitně odkaz (často budete vyzváni, abyste všechna použitá tvrzení zformulovali). Časový limit je 120 minut.

1. (15 bodů) Definujte pojem cyklické grupy. Rozhodněte, které z následujících grup jsou cyklické:

- (a)  $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_8$ ,
- (b)  $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_8$ ,
- (c)  $\mathbb{Z}_{31}^*$ .

U cyklických grup najděte generátor. U necyklických stručně zdůvodněte, proč nejsou cyklické.

**2.** (15 bodů) Spočítejte stupeň  $[\mathbb{Q}(e^{2\pi i/8}) : \mathbb{Q}]$  a najděte nějakou bázi vektorového prostoru  $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/8})$  nad tělesem  $\mathbb{Q}$ . Formulujte věty, které používáte.

**Jméno:**

**3.** (15 bodů) Kolik existuje náhrdelníků, které lze poskládat ze dvou modrých, čtyř červených a šesti bílých kuliček? Stačí číselný výraz, nemusíte dopočítávat jeho hodnotu. Dva náhrdelníky považujeme za totožné, pokud jeden z druhého dostaneme pomocí otočení a převrácení.

4. (20 bodů) Uvažujte grupu  $D_{22}$ .
- (a) Kolik má podgrup? Vypište je nějakým konkrétním, ale krátkým způsobem, a zdůvodněte, proč jiné nejsou.
  - (b) Které z těchto podgrup jsou normální? Vysvětlete!
  - (c) Je tato grupa řešitelná? Pokud ano, jaký je stupeň řešitelnosti?
  - (d) Kolik existuje homomorfismů  $D_{22} \rightarrow S_3$  ?

**Jméno:**

**5.** (20 bodů) Určete stupeň rozkladového nadtělesa polynomu  $f = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$  nad  $\mathbb{Q}$ . Určete, kolik prvků má Galoisova grupa  $\mathbf{Gal}(f/\mathbb{Q})$  a popište její jednotlivé prvky (tj. jak působí na rozkladovém nadtělese  $f$ ). Je tato grupa abelovská? Je řešitelná?