

ALGEBRA 2 (NMAG 202) – TEST 30. 6. 2020

**Jméno:**

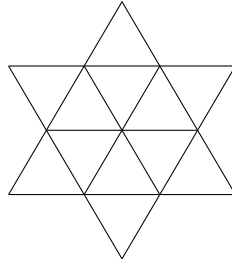
Tvrzení a definice pečlivě formulujte včetně všech předpokladů. Pište text stejně formálně, jako je psán ve skriptech. Odpovědi na otázky zdůvodněte. Pokud používáte nějaké netriviální tvrzení z přednášky, uveďte explicitně odkaz (často budete vyzváni, abyste všechna použitá tvrzení zformulovali). Časový limit je 120 minut.

1. (15 bodů) Generují prvky  $(1\ 2)$  a  $(2\ 3\ 4)$  celou  $S_4$ ? Proč? Použité věty z přednášky formulujte.

**2.** (15 bodů)važujte polynom  $f = x^4 + x^3 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ . Je faktorokruh  $R = \mathbb{Z}_2[x]/(f)$  tělesem? Proč? Ukažte, že je grupa invertibilních prvků  $(R^*, \cdot, {}^{-1}, 1)$  cyklická a najděte nějaký její generátor. Použité věty z přednášky formulujte.

**Jméno:**

**3.** (15 bodů) Kolika způsoby lze z trojúhelníkových destiček sestavit pravidelnou šesticípou hvězdu jako na obrázku níže? Stačí číselný výraz, nemusíte dopočítávat jeho hodnotu. Destičky můžete libovolně volit ze dvou barev (např. bílé a červené) a dvě sestavy považujeme za totožné, dostaneme-li jednu z druhé otočením.



4. (20 bodů) Buď  $G$  grupa.

- (a) Dokažte, že konjugaci lze interpretovat jako působení grupy na své vlastní nosné množině. Formálně, je dána grupa  $G$  a prvek  $g$  působí na  $x \in G$  jako  $g(x) = \varphi_g(x) = gxg^{-1}$ . Vaším úkolem je ověřit, že to je doopravdy působení.
- (b) Uvažujte toto působení pro grupu  $A_4$ . Kolik je orbit? Z každé zvolte jeden prvek a popište jeho stabilizátor.
- (c) Jak přesně souvisejí stabilizátory různých prvků ve stejné orbitě (zdůvodněte)?

**Jméno:**

**5.** (20 bodů) Určete stupeň rozkladového nadtělesa polynomu  $f = x^3 + 5x + 15$  nad  $\mathbb{Q}$ . Určete, kolik prvků má Galoisova grupa  $\mathbf{Gal}(f/\mathbb{Q})$  a popište její jednotlivé prvky (tj. jak působí na rozkladovém nadtělese  $f$ ). Je tato grupa abelovská? Je řešitelná?