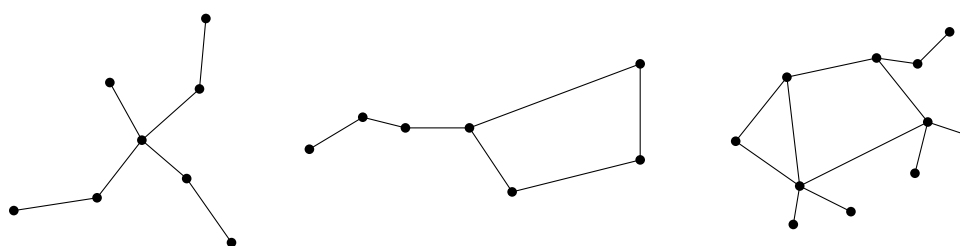


ALGEBRA 2 (NMAG 202) – TEST 17. 6. 2020

Jméno:

Tvrzení a definice pečlivě formulujte včetně všech předpokladů. Pište text stejně formálně, jako je psán ve skriptech. Odpovědi na otázky zdůvodněte. Pokud používáte nějaké netriviální tvrzení z přednášky, uveďte explicitně odkaz (často budete vyzváni, abyste všechna použitá tvrzení zformulovali). Časový limit je 120 minut.

1. (15 bodů) Určete, kolik prvků kterého řádu má grupa automorfismů (tj. isomorfismů sama na sebe) každého z následujících tří grafů, které jsou inspirovány souhvězdími labutě a velkého vozu (a neexistujícího souhvězdí prasete):



Které z těchto grup jsou abelovské? Které řešitelné a jakého stupně?

2. (15 bodů) Spočítejte stupeň $[\mathbb{Q}(e^{2\pi i/8}) : \mathbb{Q}(i)]$ a najděte nějakou bázi vektorového prostoru $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/8})$ nad tělesem $\mathbb{Q}(i)$. Formulujte věty, které používáte.

Jméno:

3. (15 bodů) Kolik existuje náhrdelníků, které lze poskládat z 12 kuliček, kde každou kuličku můžeme libovolně zvolit ze tří barev (např. modré, červené a bílé)? Stačí číselný výraz, nemusíte dopočítávat jeho hodnotu. Dva náhrdelníky považujeme za totožné, pokud jeden z druhého dostaneme pomocí otočení a převrácení.

4. (20 bodů) Uvažujte působení grupy $G = A_5$ na množině $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$ všech uspořádaných dvojic prvků 1 až 5, kde $\pi((x, y)) := (\pi(x), \pi(y))$.

- (a) Dokažte, že jde skutečně o působení grupy na množině.
- (b) Kolik má toto působení orbit a kolik tyto orbity obsahují prvků?
- (c) Vypište prvky stabilizátoru $G_{(1,2)}$ a množinu pevných bodů $X_{(1\ 2\ 3)}$. Kolik prvků obsahují?
- (d) Napište a dokažte obecně, jak spolu souvisí velikost orbity a velikost stabilizátorů.

Jméno:

5. (20 bodů) Určete stupeň rozkladového nadtělesa polynomu $f = x^4 + 2x^2 - 15$ nad \mathbb{Q} . Určete, kolik prvků má Galoisova grupa $\mathbf{Gal}(f/\mathbb{Q})$ a popište její jednotlivé prvky (tj. jak působí na rozkladovém nadtělese f). Je tato grupa abelovská? Je řešitelná?