

ALGEBRA 2 (NMAG 202) – TEST 11. 6. 2020

**Jméno:**

Tvrzení a definice pečlivě formulujte včetně všech předpokladů. Pište text stejně formálně, jako je psán ve skriptech. Odpovědi na otázky zdůvodněte. Pokud používáte nějaké netriviální tvrzení z přednášky, uveďte explicitně odkaz (často budete vyzváni, abyste všechna použitá tvrzení zformulovali). Časový limit je 120 minut.

1. (15 bodů) Definujte pojem cyklické grupy. Rozhodněte, které z následujících grup jsou cyklické:

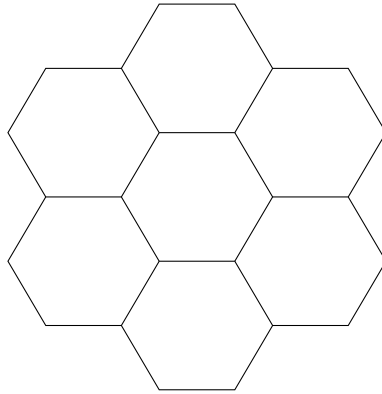
- (a)  $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_8$ ,
- (b)  $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8$ ,
- (c)  $\mathbb{Z}_{16}^*$ .

U cyklických grup najděte generátor. U necyklických stručně zdůvodněte, proč nejsou cyklické.

2. (15 bodů) Najděte minimální polynom  $\sqrt{2} + \sqrt[4]{2}$  nad  $\mathbb{Q}$ .

**Jméno:**

**3.** (15 bodů) Kolika způsoby lze políčka plástve níže obarvit třemi barvami? Stačí číselný výraz, nemusíte dopočítávat jeho hodnotu. Dvě obarvení považujeme za stejná, pokud se liší jen o otočení.



4. (20 bodů) Uvažujte působení grupy  $G = D_{10}$  na množině  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$  všech uspořádaných dvojic 1 až 5 vrcholů pravidelného pětiúhelníku, kde  $\pi((x, y)) := (\pi(x), \pi(y))$  pro každou symetrii pětiúhelníku  $\pi \in D_{10}$ .

- (a) Dokažte, že jde skutečně o působení grupy na množině.
- (b) Kolik má toto působení orbit a kolik tyto orbity obsahují prvků?
- (c) Vypište prvky stabilizátoru  $G_{(1,2)}$  a množinu pevných bodů  $X_{\rho_3}$ , kde  $\rho_3$  je symetrie podle osy procházející vrcholem 3. Kolik prvků obsahují?
- (d) Napište a dokažte obecně, jak spolu souvisí velikost orbity a velikost stabilizátorů.

**Jméno:**

**5.** (20 bodů) Určete stupeň rozkladového nadtělesa polynomu  $f = x^4 - 9x + 14$  nad  $\mathbb{Q}$ . Určete, kolik prvků má Galoisova grupa  $\mathbf{Gal}(f/\mathbb{Q})$  a popište její jednotlivé prvky (tj. jak působí na rozkladovém nadtělese  $f$ ). Je tato grupa abelovská? Je řešitelná?