

ALGEBRA 2 (NMAG 202) – TEST 4. 6. 2020

Jméno:

Tvrzení a definice pečlivě formulujte včetně všech předpokladů. Pište text stejně formálně, jako je psán ve skriptech. Odpovědi na otázky zdůvodněte. Pokud používáte nějaké netriviální tvrzení z přednášky, uveďte explicitně odkaz (často budete vyzváni, abyste všechna použitá tvrzení zformulovali). Časový limit je 120 minut.

1. (15 bodů)

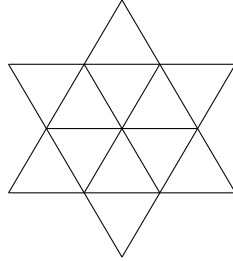
- (a) Obsahuje grupa \mathbb{Z}_9^* prvek řádu 6? podgrupu s šesti prvky?
- (b) Obsahuje grupa $S_3 \times S_3$ prvek řádu 6? podgrupu s šesti prvky?
- (c) Rozhodněte, zda je grupa $S_3 \times S_3$ izomorfní grupě

$$\langle (1\ 2), (1\ 2\ 3), (4\ 5), (4\ 5\ 6) \rangle_{S_6}.$$

2. (15 bodů) Spočítejte stupeň $[\mathbb{Q}(e^{2\pi i/9}) : \mathbb{Q}]$ a najděte nějakou bázi vektorového prostoru $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/9})$ nad tělesem \mathbb{Q} . Formulujte věty, které používáte.

Jméno:

3. (15 bodů) Kolika způsoby lze z šesti bílých a šesti červených trojúhelníkových destiček sestavit pravidelnou šesticípou hvězdu jako na obrázku níže? Stačí číselný výraz, nemusíte dopočítávat jeho hodnotu. Dvě sestavy považujeme za totožné, dostaneme-li jednu z druhé otočením.



4. (20 bodů) Buď G grupa.

- (a) Dokažte, že konjugaci lze interpretovat jako působení grupy na své vlastní nosné množině. Formálně, je dána grupa G a prvek g působí na $x \in G$ jako $g(x) = \varphi_g(x) = gxg^{-1}$. Vaším úkolem je ověřit, že to je doopravdy působení.
- (b) Uvažujte toto působení pro grupu D_{18} . Kolik je orbit? Z každé zvolte jeden prvek a popište jeho stabilizátor.
- (c) Jak přesně souvisejí stabilizátory různých prvků ve stejné orbitě (zdůvodněte)?

Jméno:

5. (20 bodů) Určete stupeň rozkladového nadtělesa polynomu $f = x^5 + 1$ nad \mathbb{Q} . Určete, kolik prvků má Galoisova grupa $\mathbf{Gal}(f/\mathbb{Q})$ a popište její jednotlivé prvky (tj. jak působí na rozkladovém nadtělese f). Je tato grupa abelovská? Je řešitelná?