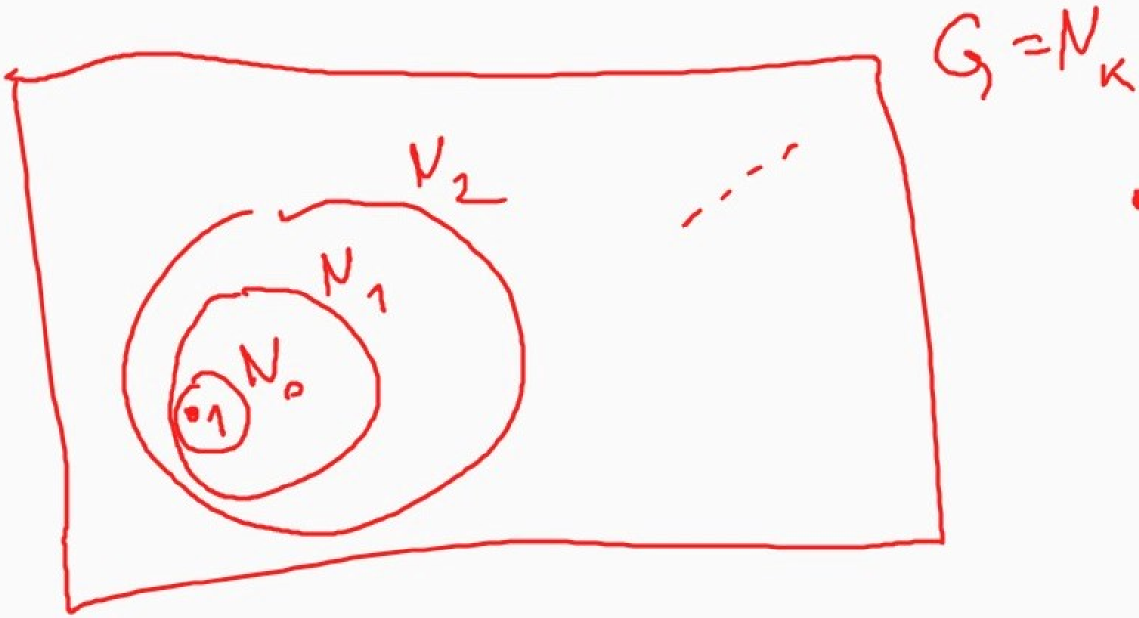
Řešitelné grupy – připomenutí

Definice
Grupa G se nazývá řešitelná, pokud existuje řetězec normálních podgrup

$$\{1\} = N_0 \leq N_1 \leq N_2 \leq \cdots \leq N_k = G$$

takový, že každá faktorgrupa N_i/N_{i-1}, $1 \leq i \leq k$, je abelovská.



- N_i/N_{i-1} ABELOVSKÁ

$\Updownarrow$

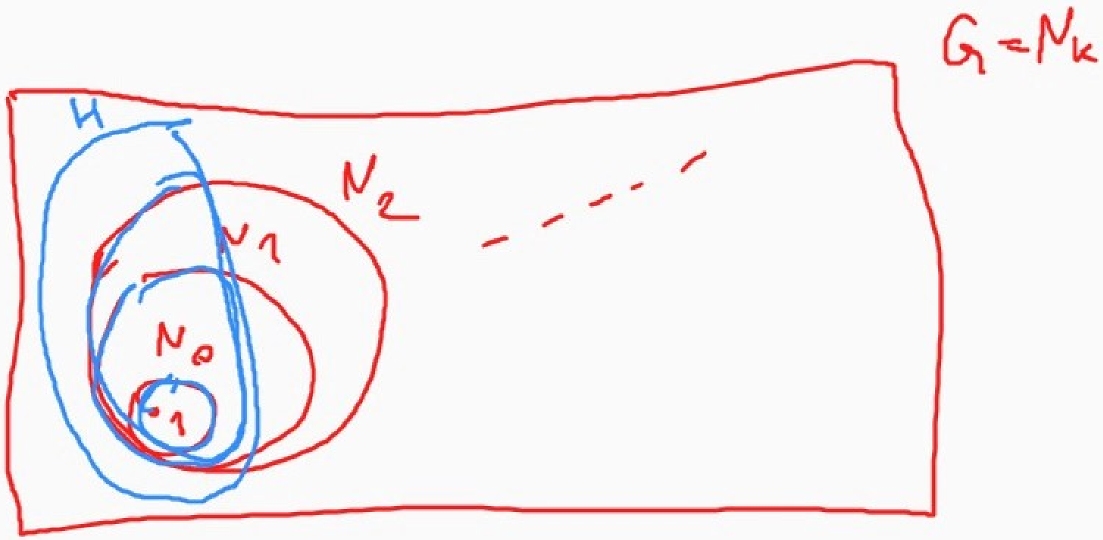
- $abN_{i-1} = baN_{i-1}$ $\forall a,b \in N_i$

$\Updownarrow$

- $a^{-1}b^{-1}ab \in N_{i-1}$ $\forall a,b \in N_i$

Podgrupa řešitelné grupy je řešitelná

- Buď G řešitelná grupa a
$$\{1\} = N_0 \le N_1 \le \cdots \le N_k = G$$
posloupnost normálních podgrup s abelovskými faktory.
- Je-li $H \le G$, pak ukážeme, že posloupnost
$$\{1\} = N_0 \cap H \le N_1 \cap H \le \cdots \le N_k \cap H = H$$
svědčí pro řešitelnost H.



Podgrupa řešitelné grupy je řešitelná

- Buď G řešitelná grupa a
$$\{1\} = N_0 \leq N_1 \leq \cdots \leq N_k = G$$
posloupnost normálních podgrup s abelovskými faktory.
- Je-li $H \leq G$, pak ukážeme, že posloupnost
$$\{1\} = N_0 \cap H \leq N_1 \cap H \leq \cdots \leq N_k \cap H = H$$
svědčí pro řešitelnost H.
- Máme totiž podle 3. věty o iso:

$$x\cdot(N_{i-1}\cap H) \in (N_i \cap H)/(N_{i-1} \cap H) = (N_i \cap H)/((N_i \cap H) \cap N_{i-1})$$
$$\cong (N_i \cap H)N_{i-1}/N_{i-1}$$
$$\leq N_i/N_{i-1} \ni x\cdot N_{i-1}$$

$$\begin{tikzcd}
 & (N_i\cap H)N_{i-1} & \\
N_i\cap H \arrow[ur, dash] & & N_{i-1} \arrow[ul, dash, "\trianglelefteq"'] \\
 & N_{i-1}\cap H \arrow[ul, dash, "\trianglelefteq"] \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}$$

Faktorgrupa řešitelné grupy je řešitelná

- Buď G řešitelná a $\{1\} = N_0 \leq N_1 \leq \cdots \leq N_k = G$.
- Je-li $K \trianglelefteq G$, pro řešitelnost G/K bude svědčit

$$\{1\} = N_0K/K \leq N_1K/K \leq \cdots \leq N_kK/K = G/K.$$

$$\pi : G \xrightarrow{NA} G/K$$

$$a \longmapsto aK$$

$$N_i \trianglelefteq G \rightsquigarrow \pi(N_i) \trianglelefteq G/K$$

$$aN_i = N_i a \rightsquigarrow \underbrace{aK \cdot \pi(N_i)}_{\pi(aN_i)} \stackrel{?}{=} \underbrace{\pi(N_i) \cdot aK}_{\pi(N_i a)}$$

$$\pi(N_i) = \{aK \mid a \in N_i\} = N_iK/K$$

$$a \in N_i,\ k \in K \Rightarrow ak \cdot K = aK$$

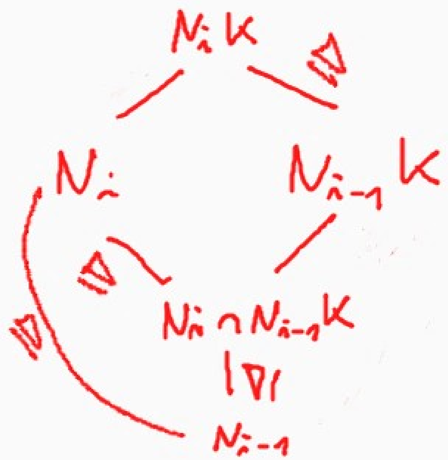
Faktorgrupa řešitelné grupy je řešitelná

- Buď G řešitelná a $\{1\} = N_0 \leq N_1 \leq \cdots \leq N_k = G$.
- Je-li $K \trianglelefteq G$, pro řešitelnost G/K bude svědčit

$$\{1\} = N_0K/K \leq N_1K/K \leq \cdots \leq N_kK/K = G/K.$$

- Použijeme postupně 2., 3. a 2. větu o iso:

$$\begin{aligned}(N_iK/K)/(N_{i-1}K/K) &\cong N_iK/N_{i-1}K \\ &= N_i(N_{i-1}K)/N_{i-1}K \\ &\cong N_i/(N_i \cap N_{i-1}K) \\ &\cong \underbrace{(N_i/N_{i-1})}_{\text{ABELOVSKA}} / ((N_i \cap N_{i-1}K)/N_{i-1}).\end{aligned}$$



Rozšířen… grup

- Buď $N \trianglelefteq G$, a předpokládejme, že N i G/N řešitelné a svědčí proto posloupnosti

$$\{1\} = L_0/N \le L_1/N \le L_2/N \le \cdots \le L_r/N = G/N,$$

$$\{1\} = K_0 \le K_1 \le K_2 \le \cdots \le K_s = N$$

- Speciálně tedy $K_i \trianglelefteq N$, $L_j \trianglelefteq G$,

$$N = L_0 \le L_1 \le L_2 \le \cdots \le L_r = G$$

a podle 3. věty o iso jsou L_j/L_{j-1} abelovské.

- Můžeme tedy použít spojenou posloupnost

$$\{1\} = K_0 \le K_1 \cdots \le K_s = L_0 \le L_1 \le \cdots \le L_r = G \quad ?$$

https://www.johndcook.com/blog/2011/09/07/normal-subgroups/

$K \trianglelefteq N$, $N \trianglelefteq G$ $\not\Rightarrow$ $K \trianglelefteq G$

→ PŘ: • $G = D_8$, SYMETRIE 

, $|N| = 4$, $|K| = 2$

• ⇒ $K \trianglelefteq N$, $N \trianglelefteq G$, PROTOŽE $[N:K] = 2 = [G:N]$

• $K = \{ id,$  $\}$

• $N = \{ id,$ , , 

$\} \cong$ KLEINOVA GRUPA $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

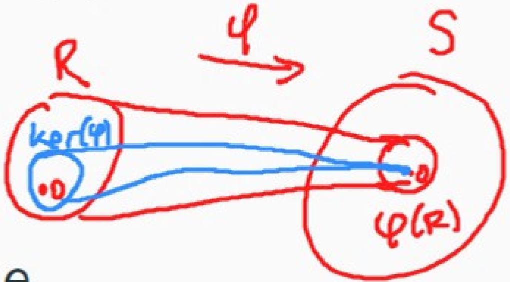
• $K \leq G$, NENÍ NORMÁLNÍ!

$aK \neq Ka$ PRO NĚJAKÉ $a \in G$, TŘEBA $a =$ 

Homomorfismy okruhů

Definice
Zobrazení $\varphi\colon R \to S$ okruhů s jednotkou je homomorfismus, pokud $\forall a, b \in R$:

$$
\begin{aligned}
\varphi(a+b) &= \varphi(a) + \varphi(b), & \varphi(0) &= 0,\\
\varphi(-a) &= -\varphi(a), & \varphi(1) &= 1.\\
\varphi(a \cdot b) &= \varphi(a) \cdot \varphi(b), & &
\end{aligned}
$$



Je-li $\varphi\colon R \to S$ homomorfismus, pak definujeme

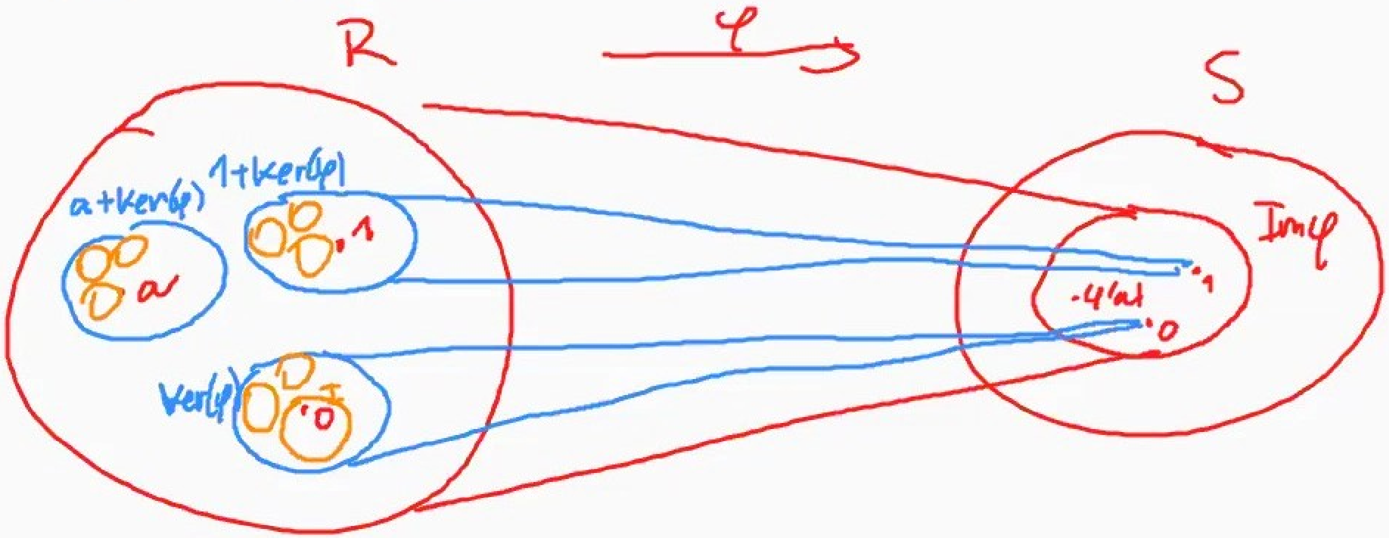
$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(\varphi) &= \{a \in R \mid \varphi(a) = 0\}, & &\text{jádro } \varphi,\\
\mathrm{Im}(\varphi) &= \{\varphi(a) \mid a \in R\}, & &\text{obraz } \varphi.
\end{aligned}
$$

První věta o isomorfismu pro okruhy

Věta (ve skriptech věta 23.1 a důsl. 23.2)
Buď $\varphi\colon R \to S$ homomorfismus komutativních okruhů.

VĚTA O HOMOMORFISMU

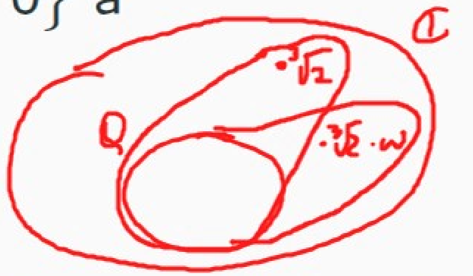
1. Je-li $I \leq R$ ideál obsažený v $\mathrm{Ker}(\varphi)$, pak je zobrazení
$$R/I \to S$$
$$a + I \mapsto \varphi(a)$$
dobře definovaný homomorfismus komutativních okruhů.
2. $R/\mathrm{Ker}(\varphi) \cong \mathrm{Im}(\varphi)$ jakožto okruhy.



Příklad – dosazovací homomorfismus

- Buď $R \leq S$ rozšíření okruhů a $a \in S$.
- Pak máme dosazovací homomorfismus $\varphi_a \colon R[x] \to S$, $\varphi_a(f) = f(a)$.

  $f \longmapsto f(a)$
- Pak máme $\mathrm{Ker}(\varphi_a) = \{\overset{f \in R[x]}{\cancel{a \in R}} \mid f(a) = 0\}$ a $R[x]/\mathrm{Ker}(\varphi_a) \cong R[a]$.



Příklad

Buď $a_1 = \sqrt[3]{2}$ a $a_2 = \sqrt[3]{2} \cdot \underbrace{e^{\frac{2\pi i}{3}}}_{=\omega} \in \mathbb{C}$ a uvažuje $\varphi_{a_i} \colon \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{C}$. Pak

$$\mathrm{Ker}(\varphi_{a_1}) = (m_{a_1,\mathbb{Q}}) = (x^3 - 2) = (m_{a_1,\mathbb{Q}}) = \mathrm{Ker}(\varphi_{a_2}).$$

Speciálně $\mathbb{Q}[a_1] \cong \mathbb{Q}[x]/(x^3 - 2) \cong \mathbb{Q}[a_2]$!

Tohle je příklad obecného tvrzení – jednoznačnosti kořenového nadtělesa ireducibilního polynomu.