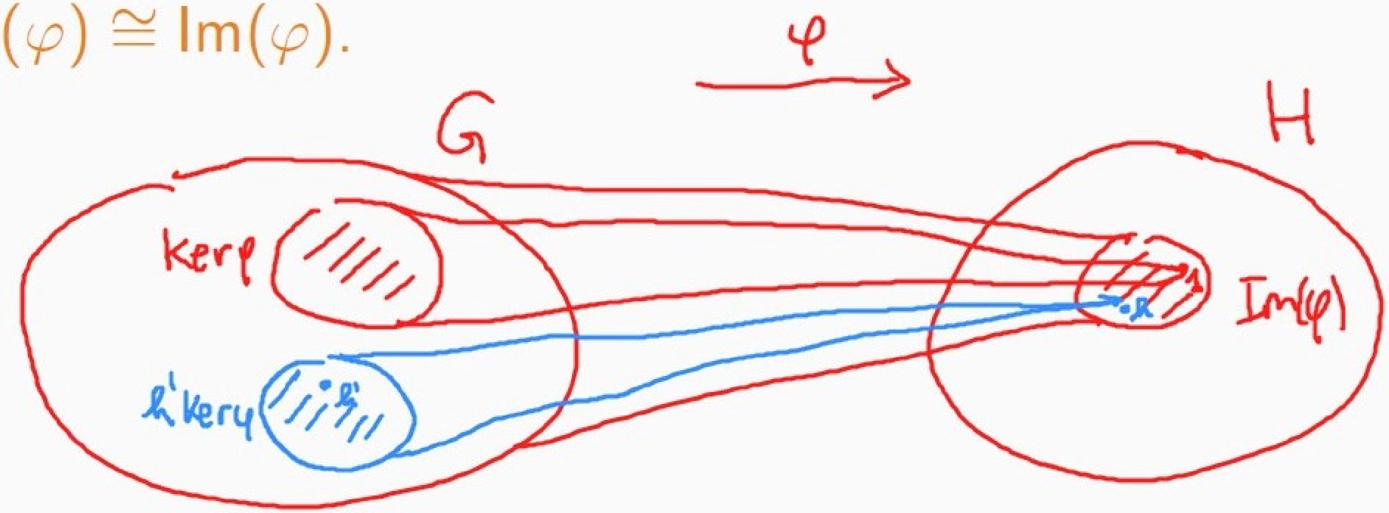
První věta o isomorfismu

Věta 6.2
Buď $\varphi\colon G \to H$ homomorfismus grup.

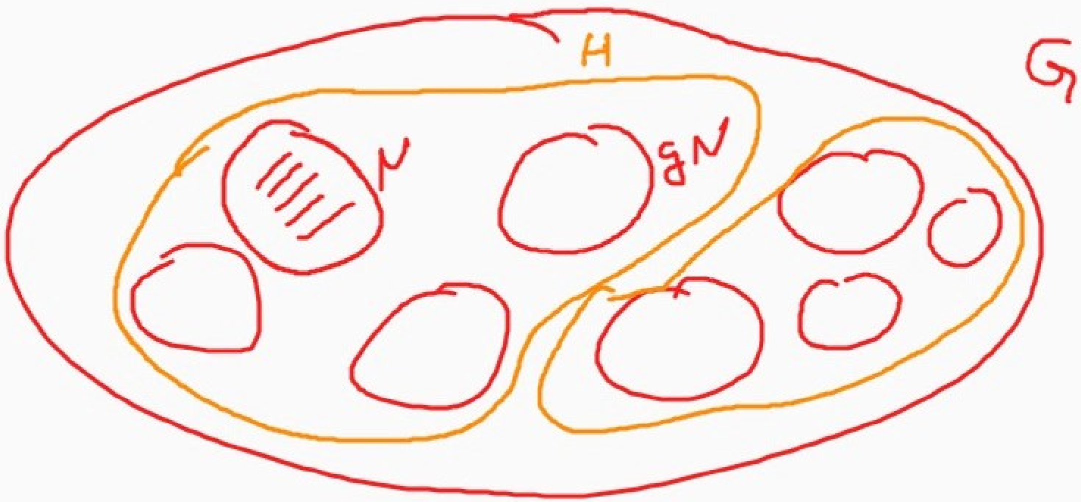
1. Je-li $N \trianglelefteq G$ obsažena v $\mathrm{Ker}(\varphi)$, pak je zobrazení
$$G/N \to H$$
$$aN \mapsto \varphi(a)$$
dobře definovaný grupový homomorfismus.
2. $G/\mathrm{Ker}(\varphi) \cong \mathrm{Im}(\varphi)$.



Druhá věta o isomorfismu, aneb $(G/N)/(H/N) \cong G/H$.

Tvrzení 6.3
Buď G grupa a $N \trianglelefteq G$.

1. Je-li $H \leq G$ a H obsahuje N, pak $H/N \leq G/N$.
2. Každá normální grupa G/N se dá zapsat jako H/N pro $H \trianglelefteq G$ obsahující N jako výše.
3. Máme-li $N \leq H \trianglelefteq G$, pak $(G/N)/(H/N) \cong G/H$.



2. VĚTA O ISO, $N \leq H \leq G$, $N, H \trianglelefteq G \Rightarrow {}^{G/N}\!/_{H/N} \cong {}^{G}\!/_{H}$

— DK: • $\pi: G/N \longrightarrow G/H$

$$aN \longmapsto aH$$

- DOBRÁ DEFINOVANOST:

$$aN = bN \Leftrightarrow b^{-1}a \in N \Rightarrow b^{-1}a \in H \Leftrightarrow aH = bH$$

- π JE NA
- POUŽIJEME 1. VĚTU O ISO NA π:
  - $\ker \pi = \{aN \mid a \in H\} = H/N$

$$\Rightarrow \quad {}^{G/N}\!/_{H/N} \overset{\cong}{\longleftrightarrow} G/H$$

$$(aN)\cdot(H/N) \longleftarrow\!\shortmid \ aH$$

Třetí věta o isomorfismu

- Je-li $H \leq G$ a $N \trianglelefteq G$, ve svazu podgrup G máme

$$\begin{tikzcd}
 & HN & \\
H \arrow[ur] & & N \arrow[ul, "\trianglelefteq"'] \\
 & H \cap N \arrow[ul, "\trianglelefteq"] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

- Pozorování: $N \trianglelefteq HN$ a $H \cap N \trianglelefteq H$. Např. pro $a \in H \cap N$ a $h \in H$ je $hah^{-1} H \cap N$.

$h \cdot 1 \cdot N = h \cdot N \longleftarrow h \cdot (H \cap N)\ ,\ h \in H$

Tvrzení 6.4
Buď G grupa, $H \leq G$ a $N \trianglelefteq G$. Pak $HN/N \cong H/(H \cap N)$.

$g \longmapsto gN$

$H \xrightarrow{\subseteq} G \xrightarrow{\pi} G/N$

Důkaz:

- Uvažujeme homomorfismus grup $\varphi \colon H \to G/N$ daný předpisem $\varphi(h) = hN$.
- Pak $\mathrm{Im}(\varphi) = HN$ a $\mathrm{Ker}(\varphi) = H \cap N$. Použijeme 1. větu o iso.

Příklady

- Dihedrální grupy D_{2n} (symetrie pravidelného n-úhelníku) jsou metabelovské:

$$\{1\} \leq \underset{\cong\ \mathbb{Z}_n}{\{\text{rotace}\}} \leq D_{2n}.$$

↑ rotace

$D_{2n}/\{\text{rotace}\} \cong \mathbb{Z}_2$

- S_3 $\cong D_6$ je metabelovská:

$$\{(1)\} \leq \underset{\{(1),(123),(132)\}\ \cong\ A_3}{\{\text{ro}\cancel{\text{ta}}\text{ce}\}} \leq \cancel{D_{2n}}.\ S_3$$

- S_4 je řešitelná stupně 3:

$A_4/K \cong \mathbb{Z}_3$ $\quad$ $S_4/A_4 \cong \mathbb{Z}_2$

$$\{(1)\} \leq \underset{\text{KLEINOVA } K\ \cong\ \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}{\{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}} \leq A_4 \leq S_4.$$

- Je-li $n \geq 5$, pak jediné normální podgrupy S_n jsou $\{1\}$, A_n a S_n (text o grupách, str. 27/28). Speciálně není S_5 pro $n \geq 5$ řešitelná.

$$\{(1)\} \leq A_n \leq S_n$$

NENÍ ABELOVSKÝ !!!