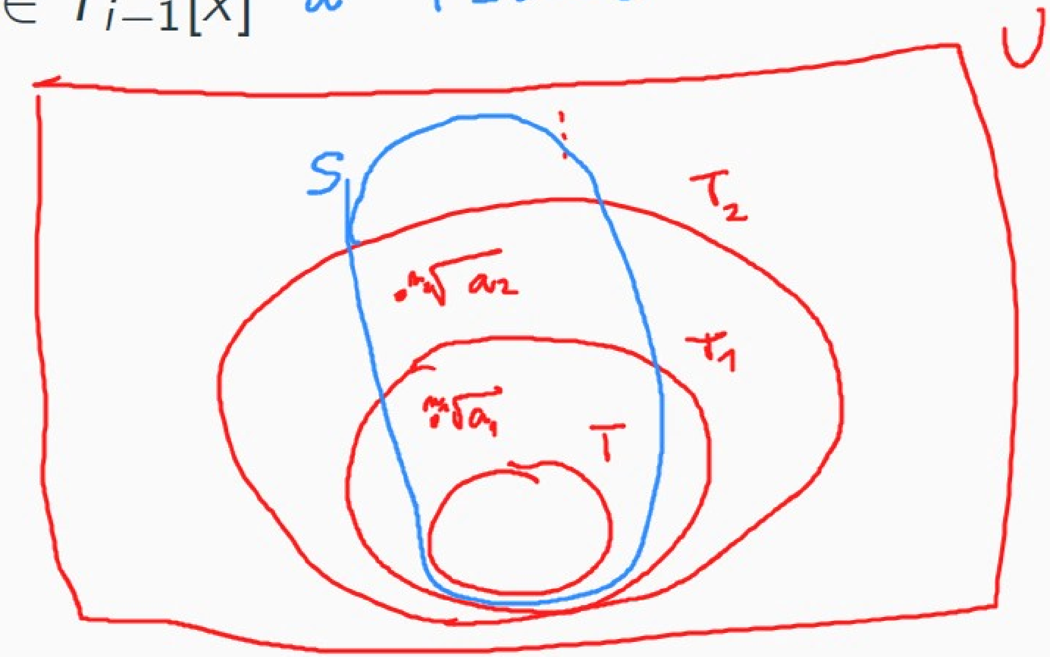
Radikálová rozšíření a vyjádřitelnost v radikálech

Definice

1. Rozšíření těles $T \leq S$ je radikálové, pokud existuje posloupnost podtěles U,

$$T = T_0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \cdots \leq T_k = U$$

taková, že každé T_i je kořenové nadtěleso polynomu $x^{n_i} - a_i \in T_{i-1}[x]$ a $T \leq S \leq U$



Myšlenka důkazu jedné implikace Galoisovy věty

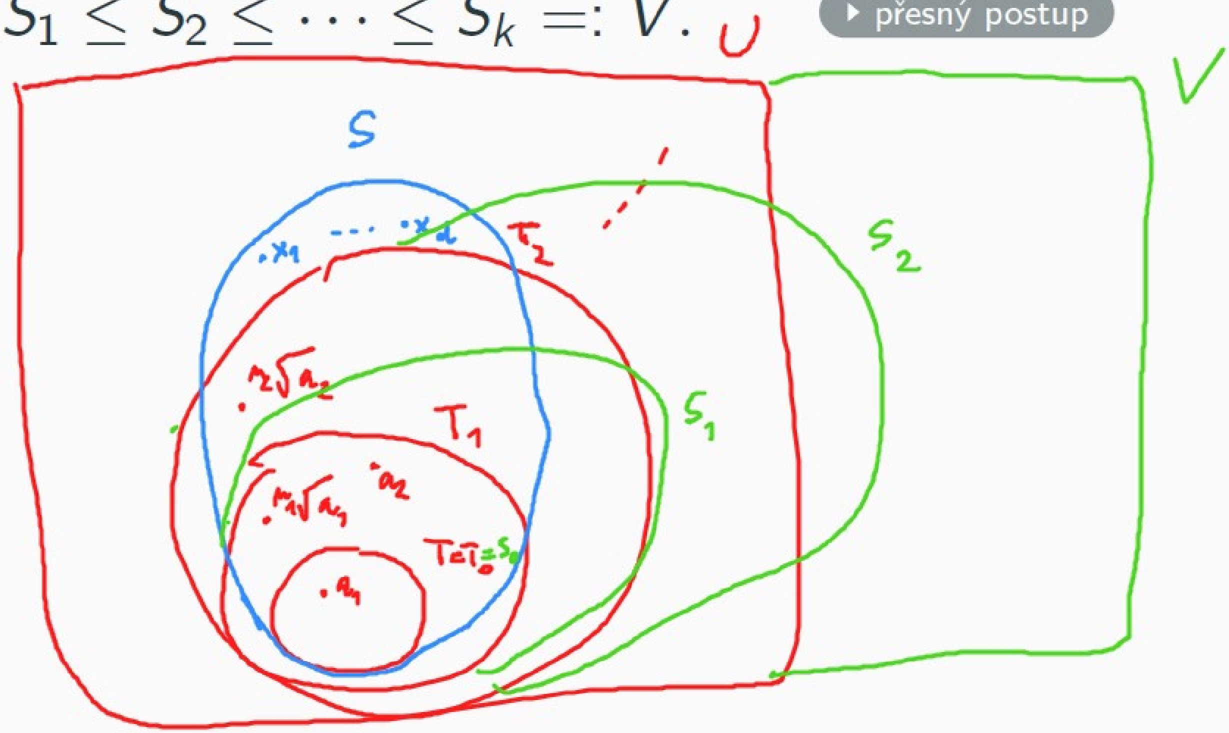
- Buď $f \in T[x]$ řešitelný v radikálech a S jeho rozkladové nadtěleso. Tj. máme radikálové rozšíření $T \leq U \leq \mathbb{C}$:

$$T = T_0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \cdots \leq T_k = U, \qquad T \leq S \leq U.$$

- Zvětšíme tělesa T_i na S_i, aby to byla rozkladová nadtělesa polynomů nad T a **Gal**(S_i/S_{i-1}) byly řešitelné grupy:

$$T = S_0 \leq S_1 \leq S_2 \leq \cdots \leq S_k =: V.$$

▸ přesný postup



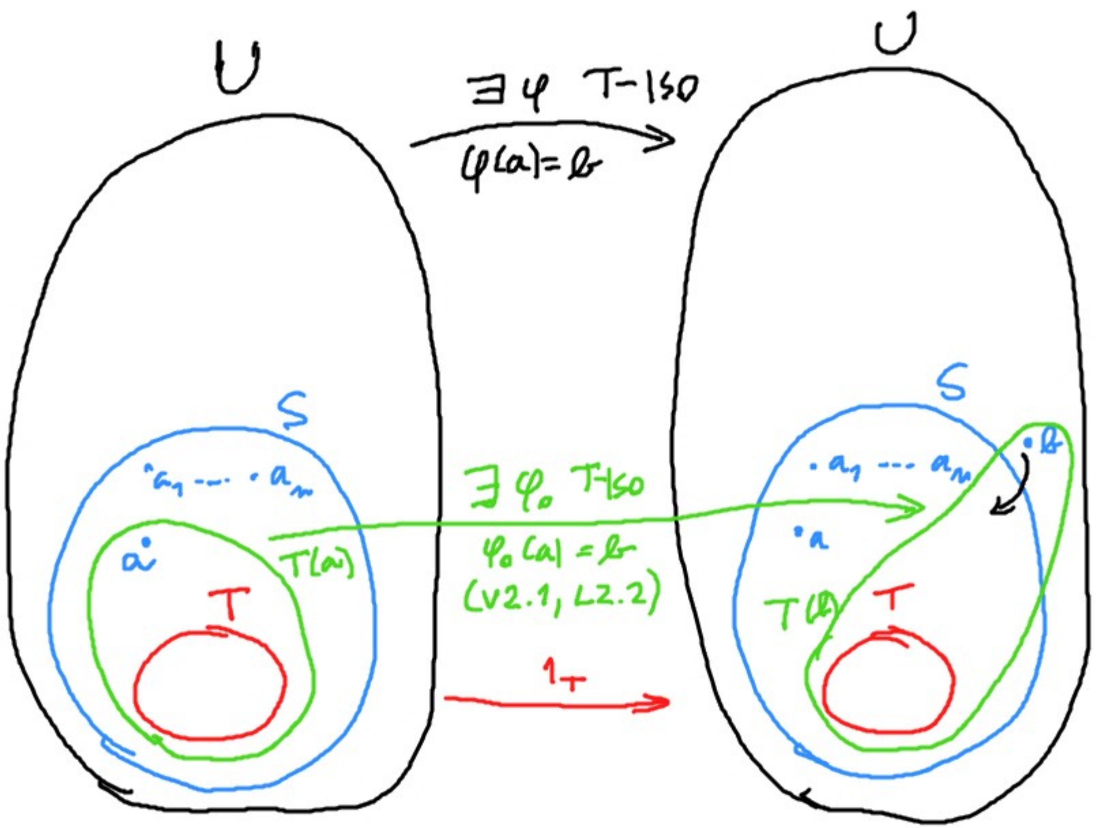
- **L3.3:** T těleso,
S ⊇ T rozkladové nadtěleso $f \in T[x]$,
$g \in T[x]$ ireducibilní.
Má-li g v S kořen, pak se v S rozkládá na kořenové činitele.

- **DK:**

a_i = kořeny f
a, b = kořeny g
U = rozkladové nadtěleso $f \cdot g \in T[x]$

- **Chceme:** $b \in S$!

T(a), T(b) kořen. nadtělesa $g \in T[x]$



- **TJ:** $\varphi \in Gal(U/T)$
- Z L2.4 vyplývá, že φ permutuje $\{a_1, \dots, a_n\}$
- Ale $S = T(a_1, \dots, a_n)$, tj. $\varphi(S) \subseteq S$

$\Rightarrow \varphi(a) = b \in S$ □

(Obrázek je tedy nepřesný!)

$\mathbb{Q}$, $x^3-2 \in \mathbb{Q}[x]$

$U = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3)$, $Gal(U/\mathbb{Q}) \cong S_3$

MEZITĚLESA

$$\begin{tikzcd}
 & & U & \\
\mathbb{Q}(\zeta_3) \arrow[urr] & \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \arrow[ur] & \mathbb{Q}(\zeta_3\sqrt[3]{2}) \arrow[u] & \mathbb{Q}(\zeta_3^2\sqrt[3]{2}) \arrow[ul] \\
 & & \mathbb{Q} \arrow[ull] \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

PODGRUPY S_3

$$\begin{tikzcd}
 & & \{(1)\} \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
A_3 \arrow[drr] & \{(1),(12)\} \arrow[dr] & \{(1),(13)\} \arrow[d] & \{(1),(23)\} \arrow[dl] \\
 & & S_3 &
\end{tikzcd}$$

$$S = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$$ NENÍ ROZKLAD. NADTĚLESO NAD $\mathbb{Q}$

$$m_{\sqrt[3]{2},\mathbb{Q}} = x^3 - 2$$

- $m_{\sqrt[3]{2},\mathbb{Q}}$ MÁ V S KOŘEN, ALE NEROZKLÁDÁ SE NA KOŘEN. ČINITELE [L3.3]

$\rightsquigarrow$ ZDE NAPŘ.: $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \subseteq \mathbb{R}$,

$$\xi_3 \cdot \sqrt[3]{2} \notin \mathbb{R}$$