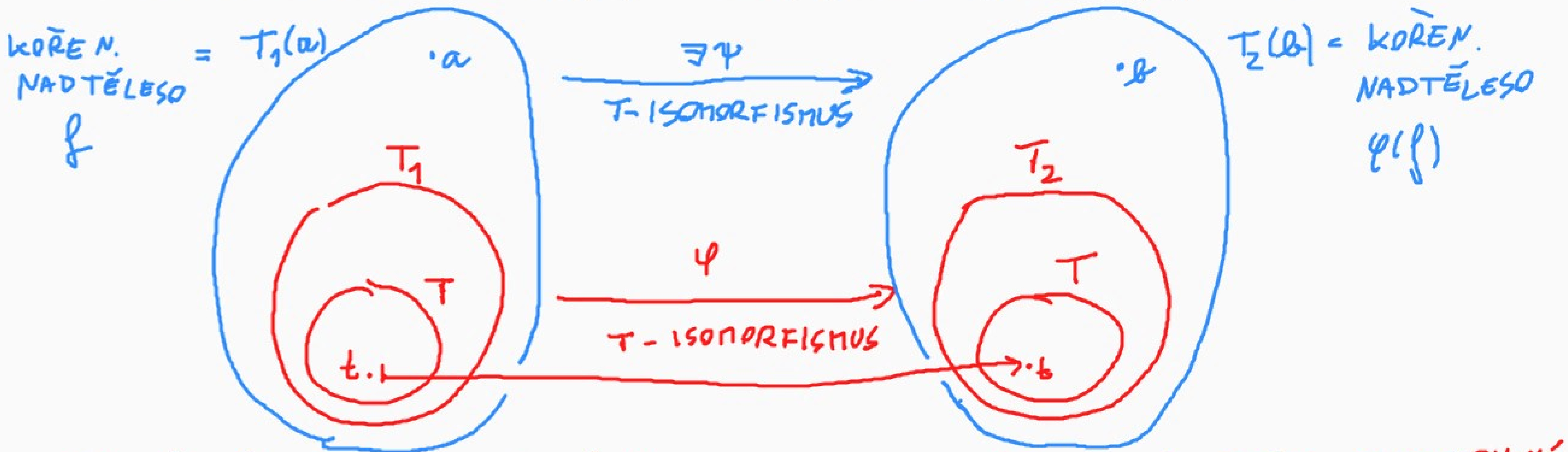
Rozšiřování T-isomorfismů o kořen

Lemma 2.2
Mějme rozšíření $T_1 \geq T$ a $T_2 \geq T$ a T-isomorfismus $\varphi\colon T_1 \to T_2$. Uvažujme ireducibilní polynom $f = \sum_{i=0}^{d} c_i x^i \in T_1[x]$ a označme $\varphi(f) = \sum_{i=0}^{d} \varphi(c_i) x^i \in T_2[x]$.

Je-li $T_1(a)$ kořenové nadtěleso f nad T_1 a $T_2(b)$ kořenové nadtěleso $\varphi(f)$ nad T_2, pak se $\varphi\colon T_1 \to T_2$ dá rozšířit na T-isomorfismus $\psi\colon T_1(a) \to T_2(a)$ takový, že $\psi(a) = b$.

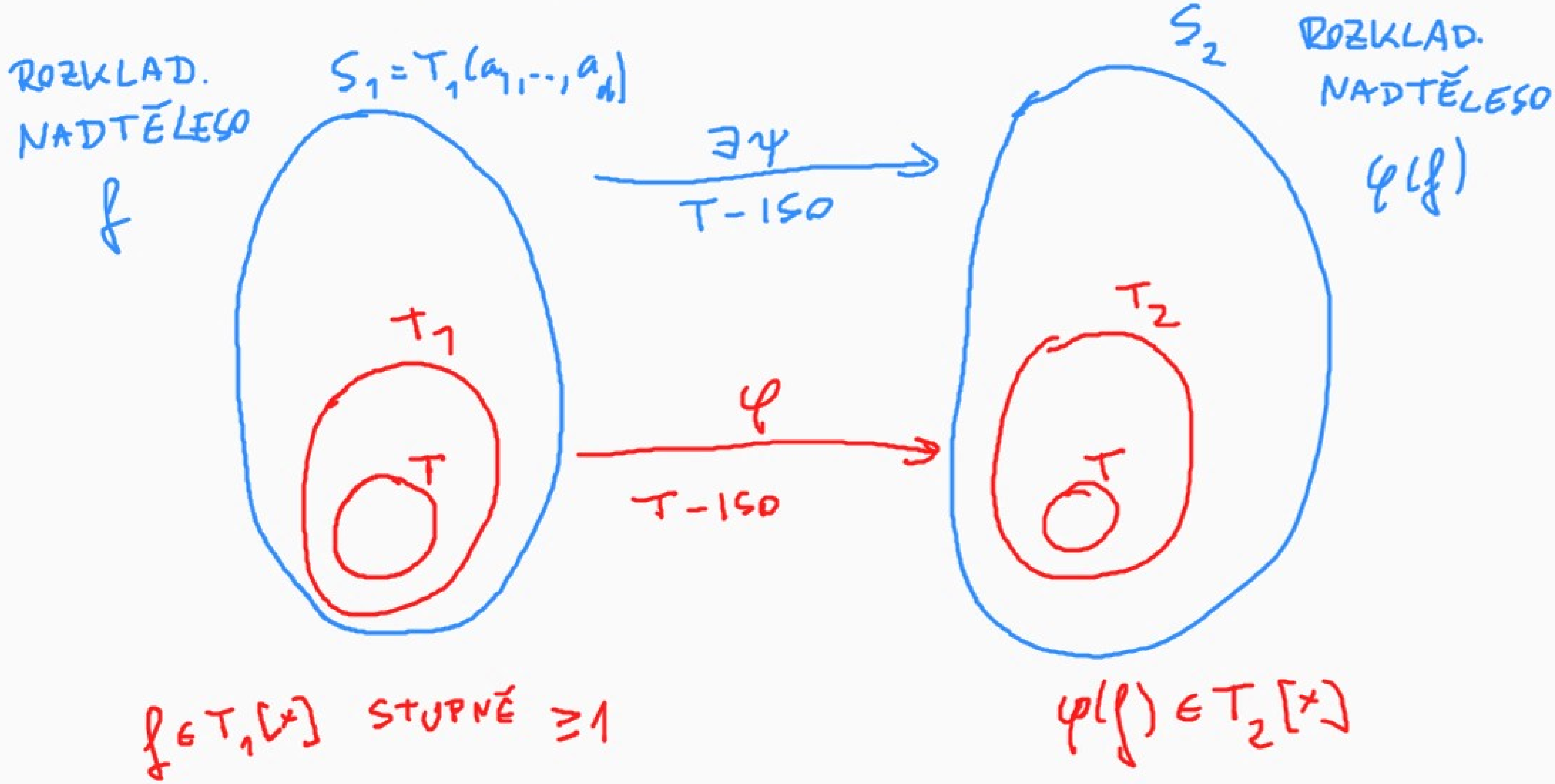


$\sum c_i x^i = f \in T_1[x]$ IREDUCIBILNÍ $\longmapsto \varphi(f) = \sum \varphi(c_i) x^i \in T_2[x]$ IREDUCIBILNÍ

Rozšiřování T-isomorfismů na rozkladová nadtělesa

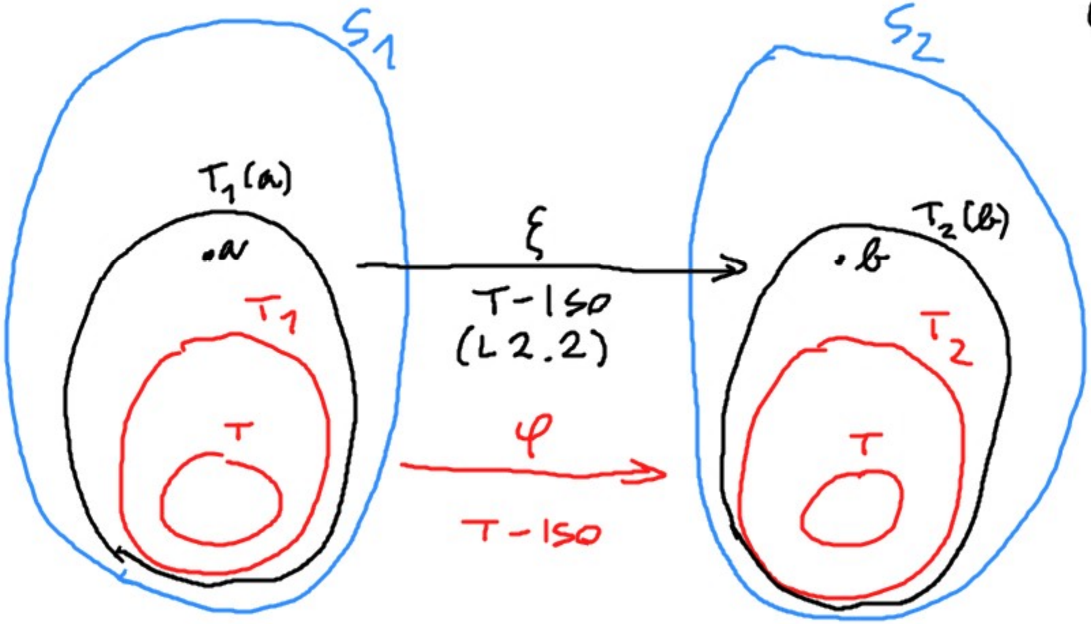
Lemma 2.3
Mějme rozšíření $T_1 \geq T$ a $T_2 \geq T$ a T-isomorfismus $\varphi\colon T_1 \to T_2$. Uvažujme $f = \sum_{i=0}^{d} c_i x^i \in T_1[x]$ stupně $d \geq 1$.

Je-li S_1 rozkladové nadtěleso f nad T_1 a $S_2(b)$ rozkladové nadtěleso $\varphi(f)$ nad T_2, pak se $\varphi\colon T_1 \to T_2$ dá rozšířit na T-isomorfismus $\psi\colon S_1 \to S_2$.



- DŮKAZ L2.3:

- BUĎ g IREDUCIBILNÍ DĚLITEL f V $T_1[x]$ A $a \in S_1$ KOŘEN g
- VEZMĚME $b \in S_2$, KOŘEN $\varphi(g)$
- INDUKČNÍ PŘEDPOKLAD POUŽIJEME NA T-ISO ξ A POLYNOM $\frac{f}{(x-a)} \in T_1(a)[x]$



$g \cdot h = f \in T_1[x]$

IREDUC.

$\varphi(g)\varphi(h) = \varphi(f) \in T_2[x]$

– <u>POZOROVÁNÍ</u>: $S_1 \geq T$, $S_2 \geq T$, T-ISO $\psi: S_1 \xrightarrow{\cong} S$

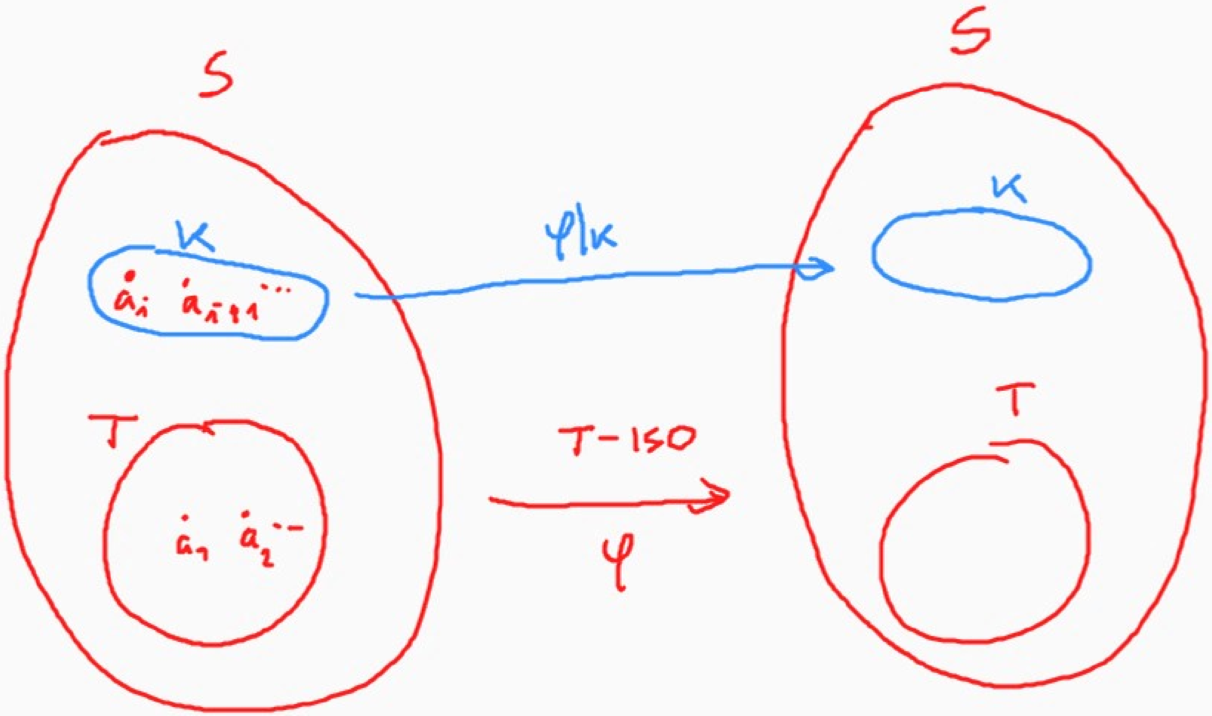
$$
\begin{array}{rccc}
\Rightarrow \Phi: & Gal(S_1/T) & \xrightarrow{\cong} & Gal(S_2/T) \\
& \varphi & \longmapsto & \psi\varphi\psi^{-1} \\
& \psi^{-1}\xi\psi & \longleftarrow\!\shortmid & \xi
\end{array}
$$

- $\left(\varphi: S_1 \xrightarrow{T\text{-ISO}} S_1\right) \longmapsto \left(S_2 \xrightarrow[\cong]{\psi^{-1}} S_1 \xrightarrow[\cong]{\varphi} S_1 \xrightarrow[\cong]{\psi} S_2\right)$
- $\Phi(\varphi_1 \circ \varphi_2) = \psi \circ \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \psi^{-1} = (\psi \circ \varphi_1 \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \varphi_2 \circ \psi^{-1}) = \Phi(\varphi_1) \circ \Phi(\varphi_2)$

  $\Rightarrow \Phi$ JE HOM. GRUP

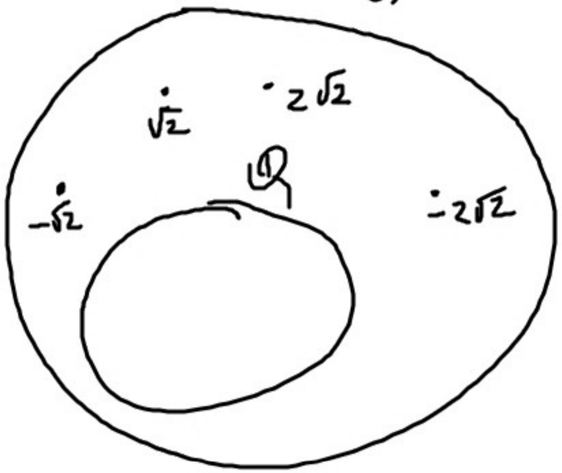
Galoisovy permutují kořeny

Lemma 2.4
Buďte $S \geq T$ rozšíření těles a $\varphi \in \mathbf{Gal}(S/T)$. Je-li $0 \neq f \in T[x]$ a $K \subseteq S$ množina všech kořenů f v S, pak $\varphi|_K$ je permutací množiny K.



$f \in T(x)$, a_i = KOŘENY f

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \mathbb{Q}(2\sqrt{2})$



$m_{\sqrt{2},\mathbb{Q}} = x^2 - 2$

$m_{2\sqrt{2},\mathbb{Q}} = x^2 - 8$