Pascalův mystický šestiúhelník

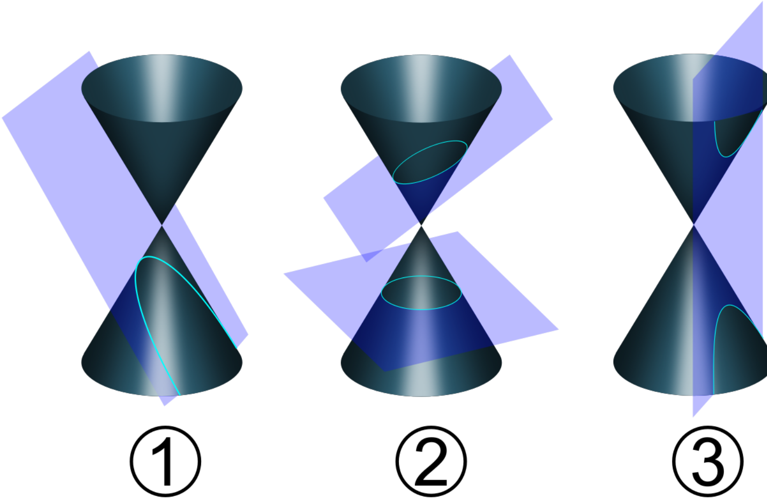
Jan Šťovíček
Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Náboj
22. 3. 2019

Obsah

Obsah

Kuželosečky



Obrázek: 1 – parabola, 2 – kružnice a elipsa, 3 – hyperbola (zdroj: Wikipedia).

Pascalova věta

Věta (Blaise Pascal v 16 letech, 1639)

Pokud vepíšeme do kuželosečky šestiúhelník,

Pascalova věta

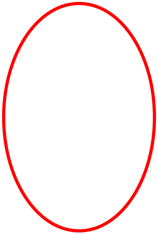
Věta (Blaise Pascal v 16 letech, 1639)

Pokud vepíšeme do kuželosečky šestiúhelník, pak průniky tří dvojic přímek vzniklých prodloužením protilehlých stran leží na jedné přímce.

Pascalova věta

Věta (Blaise Pascal v 16 letech, 1639)

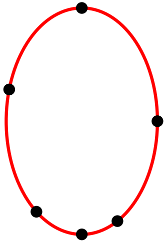
Pokud vepíšeme do kuželosečky šestiúhelník, pak průniky tří dvojic přímek vzniklých prodloužením protilehlých stran leží na jedné přímce.



Pascalova věta

Věta (Blaise Pascal v 16 letech, 1639)

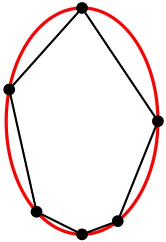
Pokud vepíšeme do kuželosečky šestiúhelník, pak průniky tří dvojic přímek vzniklých prodloužením protilehlých stran leží na jedné přímce.



Pascalova věta

Věta (Blaise Pascal v 16 letech, 1639)

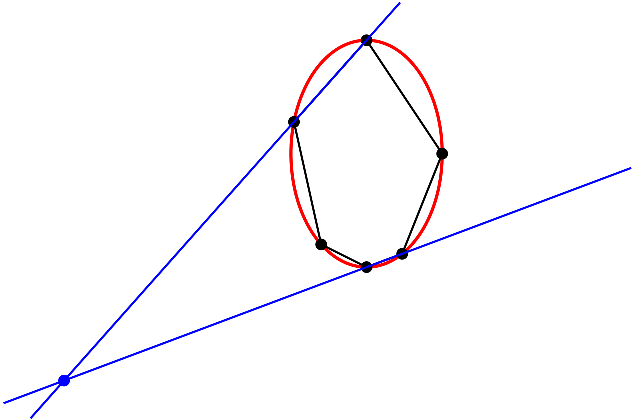
Pokud vepíšeme do kuželosečky šestiúhelník, pak průniky tří dvojic přímek vzniklých prodloužením protilehlých stran leží na jedné přímce.



Pascalova věta

Věta (Blaise Pascal v 16 letech, 1639)

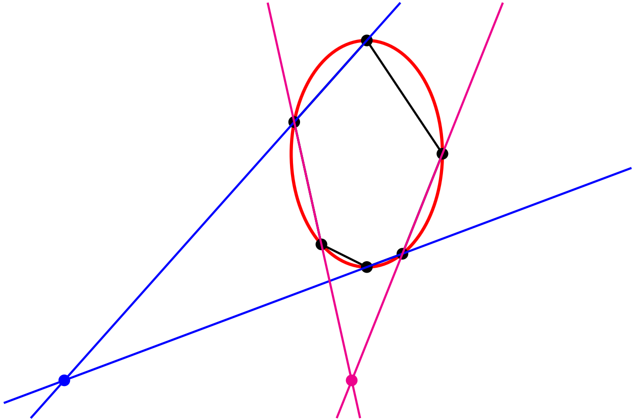
Pokud vepíšeme do kuželosečky šestiúhelník, pak průniky tří dvojic přímek vzniklých prodloužením protilehlých stran leží na jedné přímce.



Pascalova věta

Věta (Blaise Pascal v 16 letech, 1639)

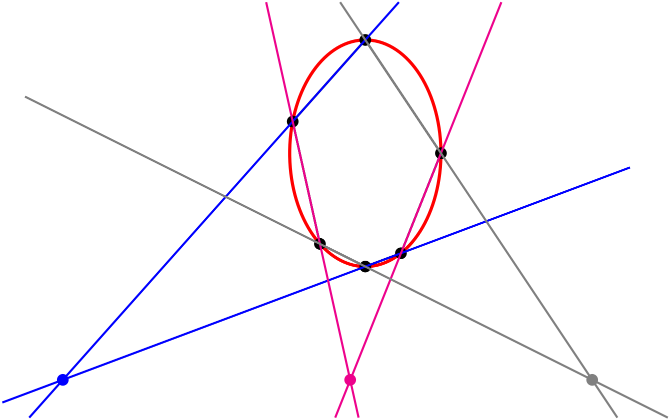
Pokud vepíšeme do kuželosečky šestiúhelník, pak průniky tří dvojic přímek vzniklých prodloužením protilehlých stran leží na jedné přímce.



Pascalova věta

Věta (Blaise Pascal v 16 letech, 1639)

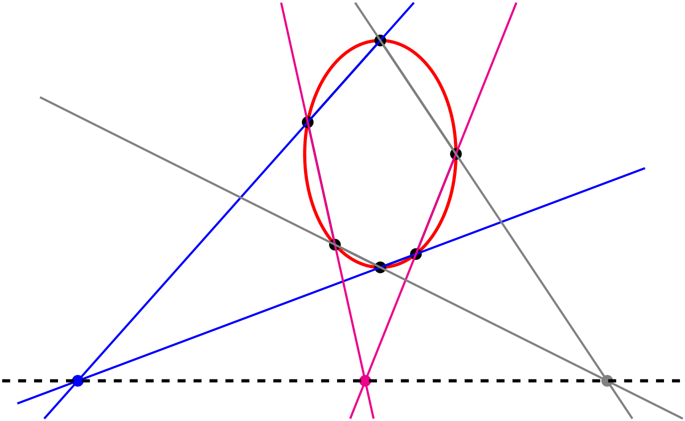
Pokud vepíšeme do kuželosečky šestiúhelník, pak průniky tří dvojic přímek vzniklých prodloužením protilehlých stran leží na jedné přímce.



Pascalova věta

Věta (Blaise Pascal v 16 letech, 1639)

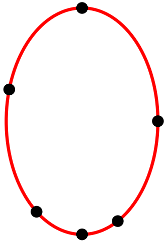
Pokud vepíšeme do kuželosečky šestiúhelník, pak průniky tří dvojic přímek vzniklých prodloužením protilehlých stran leží na jedné přímce.



Pascalova věta

Věta (Blaise Pascal v 16 letech, 1639)

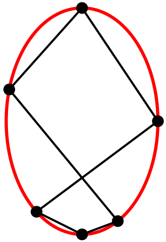
Pokud vepíšeme do kuželosečky šestiúhelník, pak průniky tří dvojic přímek vzniklých prodloužením protilehlých stran leží na jedné přímce.



Pascalova věta

Věta (Blaise Pascal v 16 letech, 1639)

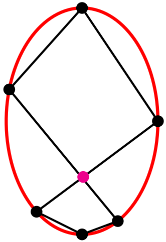
Pokud vepíšeme do kuželosečky šestiúhelník, pak průniky tří dvojic přímek vzniklých prodloužením protilehlých stran leží na jedné přímce.



Pascalova věta

Věta (Blaise Pascal v 16 letech, 1639)

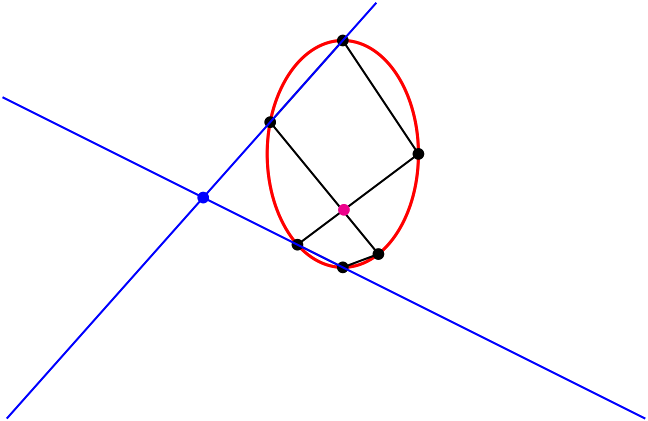
Pokud vepíšeme do kuželosečky šestiúhelník, pak průniky tří dvojic přímek vzniklých prodloužením protilehlých stran leží na jedné přímce.



Pascalova věta

Věta (Blaise Pascal v 16 letech, 1639)

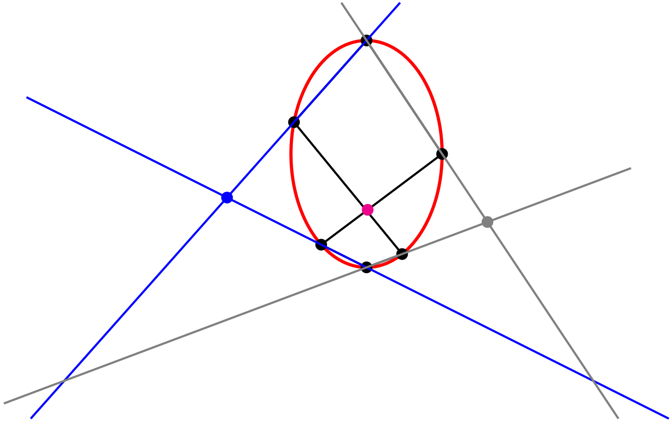
Pokud vepíšeme do kuželosečky šestiúhelník, pak průniky tří dvojic přímek vzniklých prodloužením protilehlých stran leží na jedné přímce.



Pascalova věta

Věta (Blaise Pascal v 16 letech, 1639)

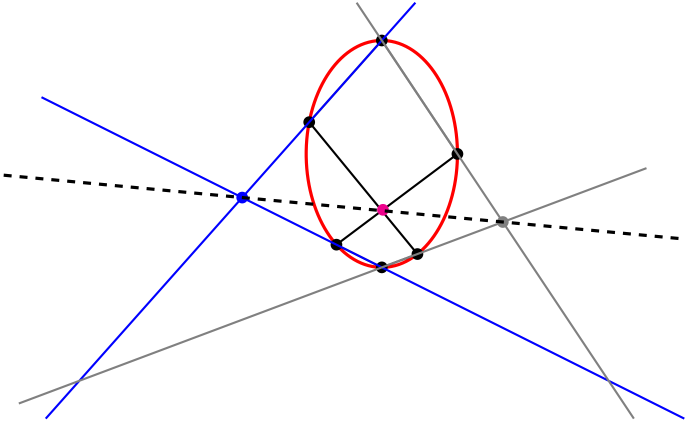
Pokud vepíšeme do kuželosečky šestiúhelník, pak průniky tří dvojic přímek vzniklých prodloužením protilehlých stran leží na jedné přímce.



Pascalova věta

Věta (Blaise Pascal v 16 letech, 1639)

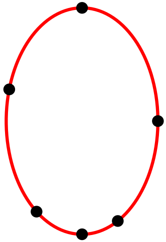
Pokud vepíšeme do kuželosečky šestiúhelník, pak průniky tří dvojic přímek vzniklých prodloužením protilehlých stran leží na jedné přímce.



Pascalova věta

Věta (Blaise Pascal v 16 letech, 1639)

Pokud vepíšeme do kuželosečky šestiúhelník, pak průniky tří dvojic přímek vzniklých prodloužením protilehlých stran leží na jedné přímce.



Hexagrammum Mysticum

- 6 bodů na kuželosečce se dá spojit 60 různými způsoby.

Hexagrammum Mysticum

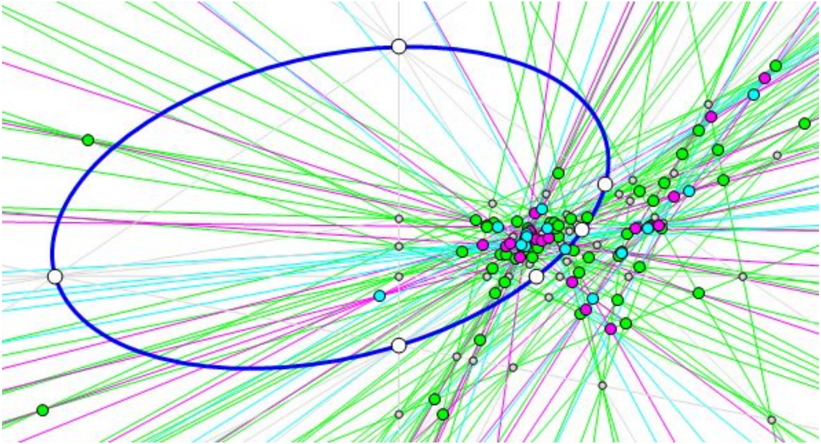
- 6 bodů na kuželosečce se dá spojit 60 různými způsoby.
- Tj. můžeme nakreslit 60 přímek,

Hexagrammum Mysticum

- 6 bodů na kuželosečce se dá spojit 60 různými způsoby.
- Tj. můžeme nakreslit 60 přímek, na nich pak leží další zajímavé body

Hexagrammum Mysticum

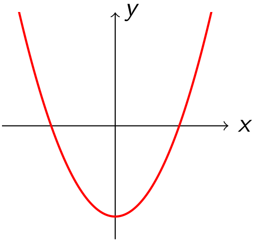
- 6 bodů na kuželosečce se dá spojit 60 různými způsoby.
- Tj. můžeme nakreslit 60 přímek, na nich pak leží další zajímavé body a celé to vypadá například takhle



(Zdroj: https://math.stackexchange.com/questions/2609331/perfect-pascal-mysticum-points)

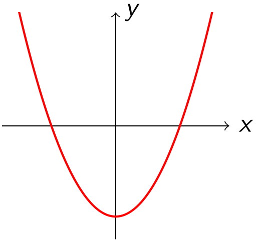
Obsah

Kuželosečky v kartézských souřadnicích



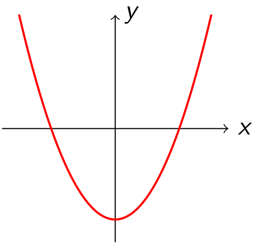
$$y = x^2 - 2$$

Kuželosečky v kartézských souřadnicích

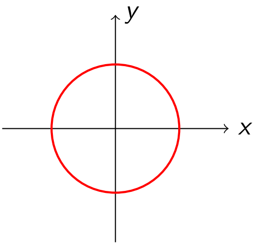


$y - x^2 + 2 = 0$

Kuželosečky v kartézských souřadnicích

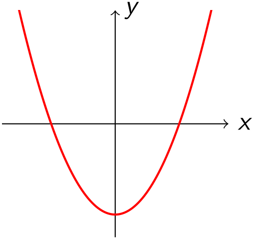


$y - x^2 + 2 = 0$

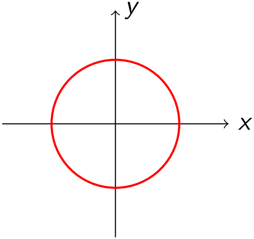


$x^2 + y^2 - 2 = 0$

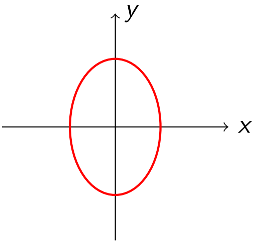
Kuželosečky v kartézských souřadnicích



$y - x^2 + 2 = 0$

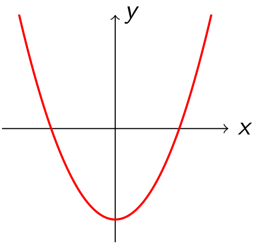


$x^2 + y^2 - 2 = 0$

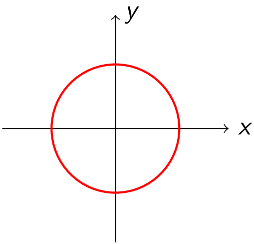


$9x^2 + 4y^2 - 9 = 0$

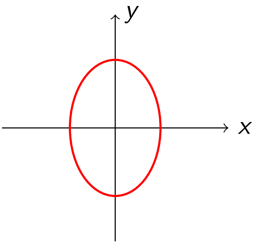
Kuželosečky v kartézských souřadnicích



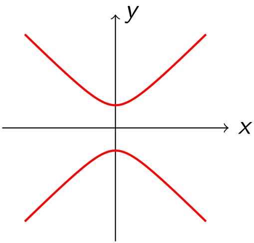
$y - x^2 + 2 = 0$



$x^2 + y^2 - 2 = 0$



$9x^2 + 4y^2 - 9 = 0$



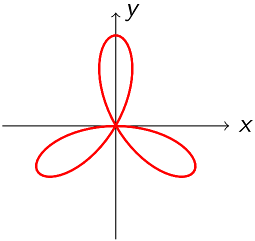
$2y^2 - 4x^2 - 1 = 0$

Algebraické variety

- Obecněji se můžeme zabývat řešením jedné nebo více polynomiálních rovnic $f(x, y) = 0$.

Algebraické variety

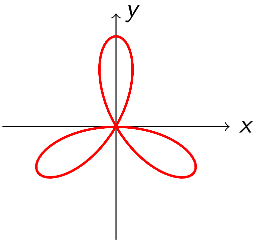
- Obecněji se můžeme zabývat řešením jedné nebo více polynomiálních rovnic $f(x, y) = 0$.



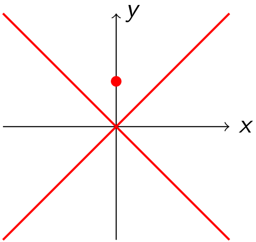
$$(x^2 + y^2)^2 + 6x^2y - 2y^3$$

Algebraické variety

- Obecněji se můžeme zabývat řešením jedné nebo více polynomiálních rovnic $f(x, y) = 0$.



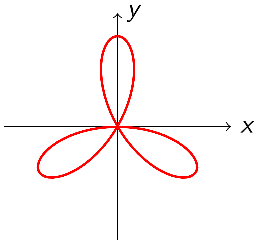
$(x^2 + y^2)^2 + 6x^2y - 2y^3$



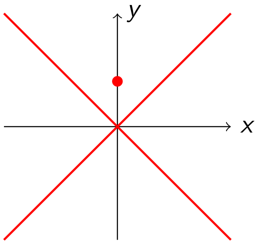
$(x^2 + y^2 - 2y + 1)(x^2 - y^2)$

Algebraické variety

- Obecněji se můžeme zabývat řešením jedné nebo více polynomiálních rovnic $f(x, y) = 0$.



$(x^2 + y^2)^2 + 6x^2y - 2y^3$

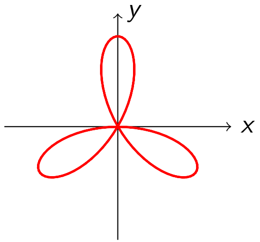


$(x^2 + y^2 - 2y + 1)(x^2 - y^2)$

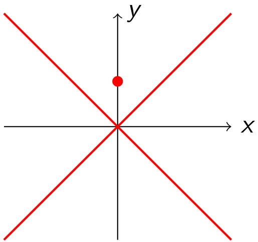
- Vzniklým obrazcům se říká algebraické variety.

Algebraické variety

- Obecněji se můžeme zabývat řešením jedné nebo více polynomiálních rovnic $f(x, y) = 0$.



$(x^2 + y^2)^2 + 6x^2y - 2y^3$

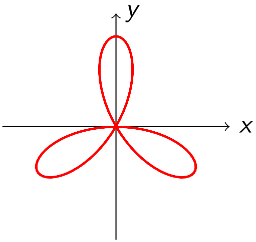


$(x^2 + y^2 - 2y + 1)(x^2 - y^2)$

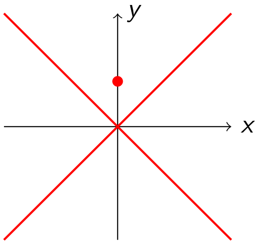
- Vzniklým obrazcům se říká algebraické variety. Obor v matematice, který se jimi zabývá,

Algebraické variety

- Obecněji se můžeme zabývat řešením jedné nebo více polynomiálních rovnic $f(x, y) = 0$.



$(x^2 + y^2)^2 + 6x^2y - 2y^3$



$(x^2 + y^2 - 2y + 1)(x^2 - y^2)$

- Vzniklým obrazcům se říká algebraické variety. Obor v matematice, který se jimi zabývá, se jmenuje algebraická geometrie.

Prvočíselná věta pro polynomy

- Podobně jako u přirozených čísel,

Prvočíselná věta pro polynomy

- Podobně jako u přirozených čísel, některé polynomy jdou zapsat jako součin polynomů menších stupňů,

Prvočíselná věta pro polynomy

- Podobně jako u přirozených čísel, některé polynomy jdou zapsat jako součin polynomů menších stupňů, např.

$$x^3 + x^2y - x - y = (x^2 - 1)(x + y)$$

Prvočíselná věta pro polynomy

- Podobně jako u přirozených čísel, některé polynomy jdou zapsat jako součin polynomů menších stupňů, např.

$$x^3 + x^2y - x - y = (x^2 - 1)(x + y)$$

a některé nejdou, např.

$$x^2 + y^2 - 1.$$

Prvočíselná věta pro polynomy

- Podobně jako u přirozených čísel, některé polynomy jdou zapsat jako součin polynomů menších stupňů, např.

  $$x^3 + x^2y - x - y = (x^2 - 1)(x + y)$$

  a některé nejdou, např.

  $$x^2 + y^2 - 1.$$

  Těm druhým se říká nerozložitelné polynomy.

Prvočíselná věta pro polynomy

- Podobně jako u přirozených čísel, některé polynomy jdou zapsat jako součin polynomů menších stupňů, např.

  $$x^3 + x^2y - x - y = (x^2 - 1)(x + y)$$

  a některé nejdou, např.

  $$x^2 + y^2 - 1.$$

  Těm druhým se říká nerozložitelné polynomy.

Věta (Carl Friedrich Gauss)

Každý nekonstantní polynom $f(x, y)$ s reálnými koeficienty se dá zapsat jako součin nerozložitelných:

Prvočíselná věta pro polynomy

- Podobně jako u přirozených čísel, některé polynomy jdou zapsat jako součin polynomů menších stupňů, např.

$$x^3 + x^2y - x - y = (x^2 - 1)(x + y)$$

a některé nejdou, např.

$$x^2 + y^2 - 1.$$

Těm druhým se říká nerozložitelné polynomy.

Věta (Carl Friedrich Gauss)

Každý nekonstantní polynom $f(x, y)$ s reálnými koeficienty se dá zapsat jako součin nerozložitelných:

$$f(x, y) = p_1(x, y) \cdot p_2(x, y) \cdots p_n(x, y).$$

Prvočíselná věta pro polynomy

- Podobně jako u přirozených čísel, některé polynomy jdou zapsat jako součin polynomů menších stupňů, např.

$$x^3 + x^2 y - x - y = (x^2 - 1)(x + y)$$

a některé nejdou, např.

$$x^2 + y^2 - 1.$$

Těm druhým se říká nerozložitelné polynomy.

Věta (Carl Friedrich Gauss)

Každý nekonstantní polynom $f(x, y)$ s reálnými koeficienty se dá zapsat jako součin nerozložitelných:

$$f(x, y) = p_1(x, y) \cdot p_2(x, y) \cdots p_n(x, y).$$

Takový zápis je navíc jednoznačný

Prvočíselná věta pro polynomy

- Podobně jako u přirozených čísel, některé polynomy jdou zapsat jako součin polynomů menších stupňů, např.

$$x^3 + x^2 y - x - y = (x^2 - 1)(x + y)$$

a některé nejdou, např.

$$x^2 + y^2 - 1.$$

Těm druhým se říká nerozložitelné polynomy.

Věta (Carl Friedrich Gauss)

Každý nekonstantní polynom $f(x, y)$ s reálnými koeficienty se dá zapsat jako součin nerozložitelných:

$$f(x, y) = p_1(x, y) \cdot p_2(x, y) \cdots p_n(x, y).$$

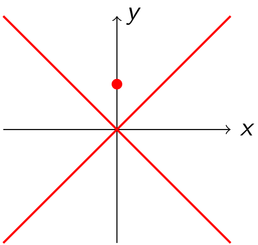
Takový zápis je navíc jednoznačný (až na změnu pořadí a násobení polynomů $p_i(x, y)$ nenulovými konstantami).

Nerozložitelné variety

- Některé variety se dají zapsat jako sjednocení menších variet a některé ne.

Nerozložitelné variety

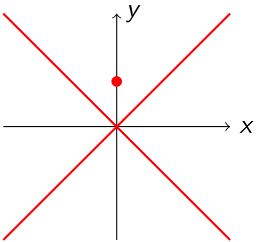
- Některé variety se dají zapsat jako sjednocení menších variet a některé ne.



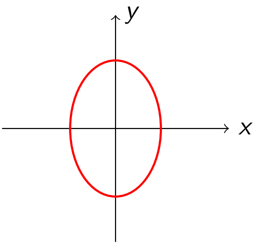
$$(x^2 + y^2 - 2y + 1)(x^2 - y^2) = 0$$

Nerozložitelné variety

- Některé variety se dají zapsat jako sjednocení menších variet a některé ne.



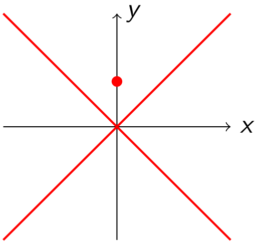
$$(x^2 + y^2 - 2y + 1)(x^2 - y^2) = 0$$



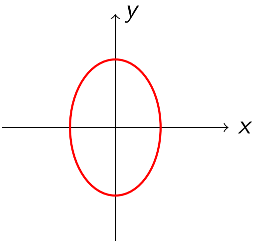
$$9x^2 + 4y^2 - 9 = 0$$

Nerozložitelné variety

- Některé variety se dají zapsat jako sjednocení menších variet a některé ne.



$$(x^2 + y^2 - 2y + 1)(x^2 - y^2) = 0$$

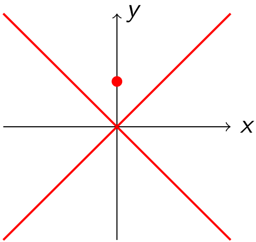


$$9x^2 + 4y^2 - 9 = 0$$

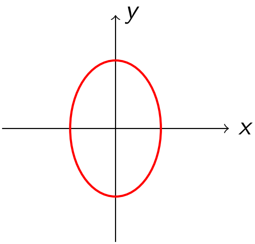
- Těm druhým se říká nerozložitelné.

Nerozložitelné variety

- Některé variety se dají zapsat jako sjednocení menších variet a některé ne.



$$(x^2 + y^2 - 2y + 1)(x^2 - y^2) = 0$$

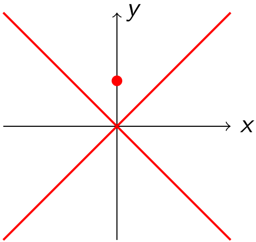


$$9x^2 + 4y^2 - 9 = 0$$

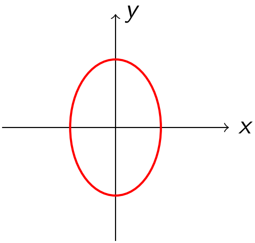
- Těm druhým se říká nerozložitelné. Každá varieta je konečné sjednocení nerozložitelných

Nerozložitelné variety

- Některé variety se dají zapsat jako sjednocení menších variet a některé ne.



$$(x^2 + y^2 - 2y + 1)(x^2 - y^2) = 0$$

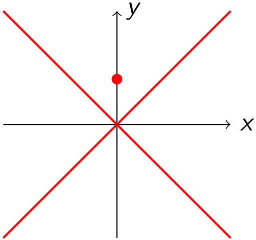


$$9x^2 + 4y^2 - 9 = 0$$

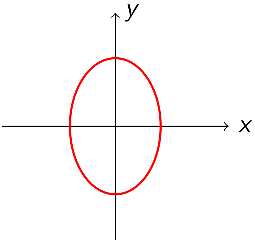
- Těm druhým se říká nerozložitelné. Každá varieta je konečné sjednocení nerozložitelných (v určitém smyslu jednoznačné).

Nerozložitelné variety

- Některé variety se dají zapsat jako sjednocení menších variet a některé ne.



$$(x^2 + y^2 - 2y + 1)(x^2 - y^2) = 0$$

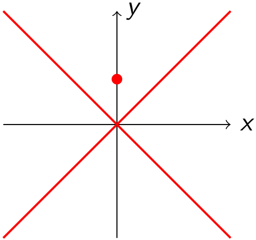


$$9x^2 + 4y^2 - 9 = 0$$

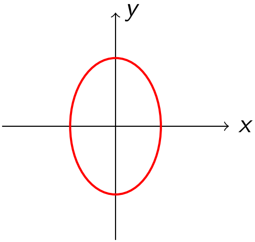
- Těm druhým se říká nerozložitelné. Každá varieta je konečné sjednocení nerozložitelných (v určitém smyslu jednoznačné).
- Nerozložitelné variety v rovině jsou přesně:

Nerozložitelné variety

- Některé variety se dají zapsat jako sjednocení menších variet a některé ne.



$(x^2 + y^2 - 2y + 1)(x^2 - y^2) = 0$

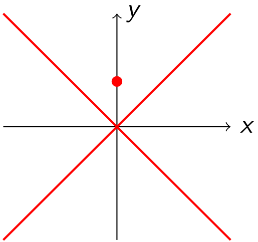


$9x^2 + 4y^2 - 9 = 0$

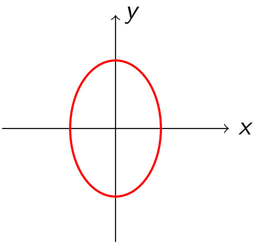
- Těm druhým se říká nerozložitelné. Každá varieta je konečné sjednocení nerozložitelných (v určitém smyslu jednoznačné).
- Nerozložitelné variety v rovině jsou přesně:
  1. body,

Nerozložitelné variety

- Některé variety se dají zapsat jako sjednocení menších variet a některé ne.



$$(x^2+y^2-2y+1)(x^2-y^2)=0$$

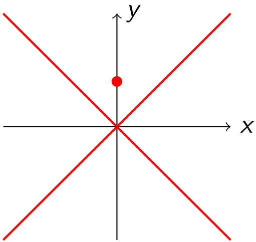


$$9x^2+4y^2-9=0$$

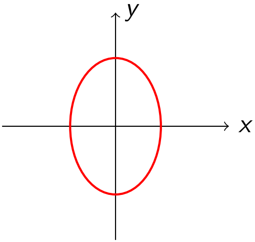
- Těm druhým se říká nerozložitelné. Každá varieta je konečné sjednocení nerozložitelných (v určitém smyslu jednoznačné).
- Nerozložitelné variety v rovině jsou přesně:
  1. body,
  2. nekonečné množiny řešení nerozložitelných polynomů $f(x, y)$,

Nerozložitelné variety

- Některé variety se dají zapsat jako sjednocení menších variet a některé ne.



$$(x^2 + y^2 - 2y + 1)(x^2 - y^2) = 0$$

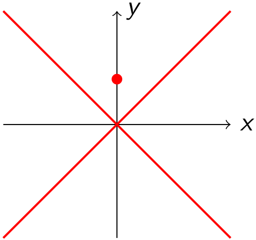


$$9x^2 + 4y^2 - 9 = 0$$

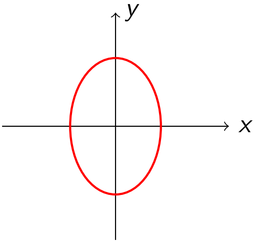
- Těm druhým se říká nerozložitelné. Každá varieta je konečné sjednocení nerozložitelných (v určitém smyslu jednoznačné).
- Nerozložitelné variety v rovině jsou přesně:
  1. body,
  2. nekonečné množiny řešení nerozložitelných polynomů $f(x, y)$,
  3. celá rovina.

Nerozložitelné variety

- Některé variety se dají zapsat jako sjednocení menších variet a některé ne.



$$(x^2 + y^2 - 2y + 1)(x^2 - y^2) = 0$$



$$9x^2 + 4y^2 - 9 = 0$$

- Těm druhým se říká nerozložitelné. Každá varieta je konečné sjednocení nerozložitelných (v určitém smyslu jednoznačné).
- Nerozložitelné variety v rovině jsou přesně:
  1. body,
  2. nekonečné množiny řešení nerozložitelných polynomů $f(x, y)$,
  3. celá rovina.

Obsah

Bézoutova věta

Věta (Étienne Bézout 1779, Isaac Newton 1687)

Pokud máme polynom $f(x, y)$ stupně $m > 0$

Bézoutova věta

Věta (Étienne Bézout 1779, Isaac Newton 1687)

Pokud máme polynom $f(x, y)$ stupně $m > 0$ a polynom $g(x, y)$ stupně $n > 0$,

Bézoutova věta

Věta (Étienne Bézout 1779, Isaac Newton 1687)

Pokud máme polynom $f(x,y)$ stupně $m > 0$ a polynom $g(x,y)$ stupně $n > 0$, pak

- buď jsou $f(x,y)$ a $g(x,y)$ soudělné

Bézoutova věta

Věta (Étienne Bézout 1779, Isaac Newton 1687)

Pokud máme polynom $f(x, y)$ stupně $m > 0$ a polynom $g(x, y)$ stupně $n > 0$, pak

- buď jsou $f(x, y)$ a $g(x, y)$ soudělné (tj. jsou oba dělitelné nějakým nekonstantním polynomem $h(x, y)$)

Bézoutova věta

Věta (Étienne Bézout 1779, Isaac Newton 1687)

Pokud máme polynom $f(x, y)$ stupně $m > 0$ a polynom $g(x, y)$ stupně $n > 0$, pak

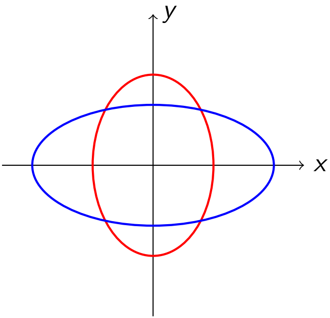
- buď jsou $f(x, y)$ a $g(x, y)$ soudělné (tj. jsou oba dělitelné nějakým nekonstantním polynomem $h(x, y)$)
- nebo mají rovnice $f(x, y) = 0$ a $g(x, y) = 0$ nejvýše $m \cdot n$ společných řešení.

Bézoutova věta

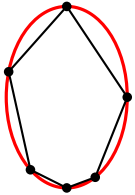
Věta (Étienne Bézout 1779, Isaac Newton 1687)

Pokud máme polynom $f(x, y)$ stupně $m > 0$ a polynom $g(x, y)$ stupně $n > 0$, pak

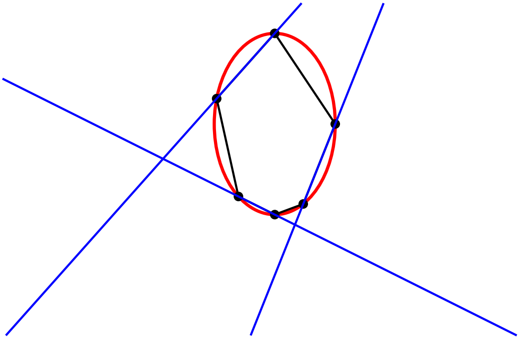
- buď jsou $f(x, y)$ a $g(x, y)$ soudělné (tj. jsou oba dělitelné nějakým nekonstantním polynomem $h(x, y)$)
- nebo mají rovnice $f(x, y) = 0$ a $g(x, y) = 0$ nejvýše $m \cdot n$ společných řešení.



Důkaz Pascalovy věty

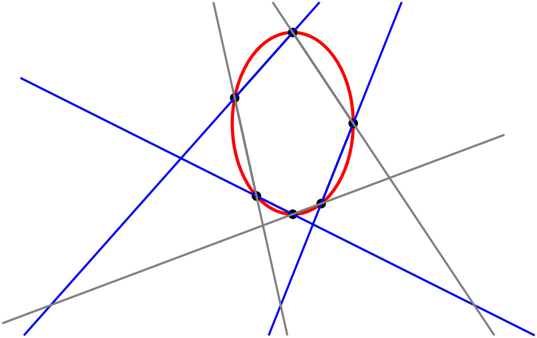


Důkaz Pascalovy věty



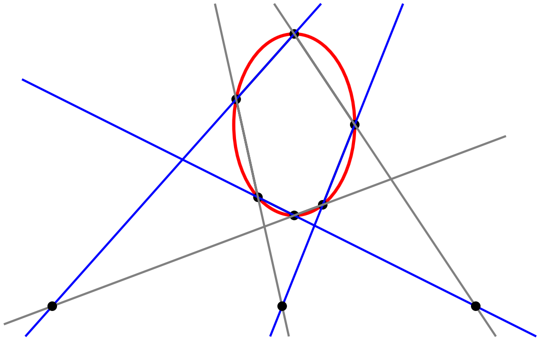
1. Polynom $f(x, y) = L_1(x, y)L_3(x, y)L_5(x, y)$ určující modré přímky.

Důkaz Pascalovy věty



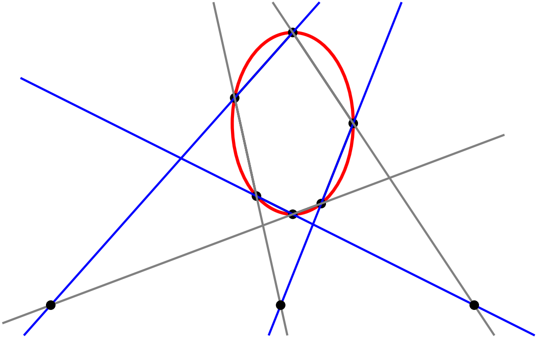
1. Polynom $f(x, y) = L_1(x, y)L_3(x, y)L_5(x, y)$ určující modré přímky.
2. Polynom $g(x, y) = L_2(x, y)L_4(x, y)L_6(x, y)$ určující šedé přímky.

Důkaz Pascalovy věty



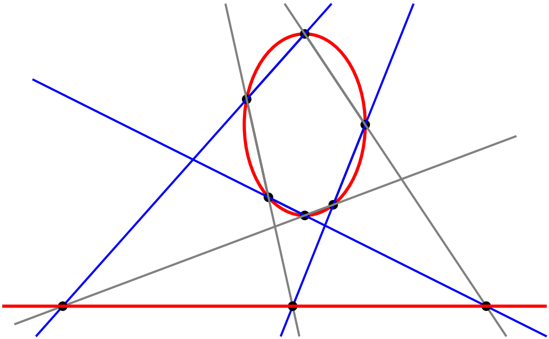
1. Polynom $f(x, y) = L_1(x, y)L_3(x, y)L_5(x, y)$ určující modré přímky.
2. Polynom $g(x, y) = L_2(x, y)L_4(x, y)L_6(x, y)$ určující šedé přímky.
3. f a g mají 9 společných řešení, z toho 6 na elipse.

Důkaz Pascalovy věty



1. Polynom $f(x, y) = L_1(x, y)L_3(x, y)L_5(x, y)$ určující modré přímky.
2. Polynom $g(x, y) = L_2(x, y)L_4(x, y)L_6(x, y)$ určující šedé přímky.
3. f a g mají 9 společných řešení, z toho 6 na elipse.
4. Vezmeme reálná čísla c_1, c_2 tak, aby polynom $h(x, y) = c_1 f(x, y) + c_2 g(x, y)$ měl sedmý bod na elipse.

Důkaz Pascalovy věty



1. Polynom $f(x, y) = L_1(x, y)L_3(x, y)L_5(x, y)$ určující modré přímky.
2. Polynom $g(x, y) = L_2(x, y)L_4(x, y)L_6(x, y)$ určující šedé přímky.
3. f a g mají 9 společných řešení, z toho 6 na elipse.
4. Vezmeme reálná čísla c_1, c_2 tak, aby polynom $h(x, y) = c_1 f(x, y) + c_2 g(x, y)$ měl sedmý bod na elipse.
5. Z Bézoutovy věty $h =$(rovnice elipsy)$\cdot$(rovnice přímky).