

ALGEBRA II (NMAG 202) – DOMÁCÍ ÚLOHY 1

Termín odevzdání: 13. 3. 2017 do 13:50 hod.

- (1) Buďte $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{C}$ všechny komplexní kořeny polynomu $x^3 - x + 2$. Určete hodnotu výrazu $u_1^3 + u_2^3 + u_3^3$ a vysvětlete, proč jde o celé číslo. (5 bodů)

- (2) Rozhodněte, zda pro danou množinu G s danou binární operací $*$: $G \times G \rightarrow G$ existují operace $'$ a konstanta e tak, aby $(G, *, ', e)$ byla grupa:

- (a) $G = \mathbb{R}$, tj. množina všech reálných čísel, s operací násobení.
(b) Podmnožina $G \subseteq \mathbb{Z}_{1024}$ sestávající ze všech lichých čísel s operací násobení modulo 1024.
(c) Množina G všech konečných podmnožin množiny přirozených čísel s operací symetrické diference. Tj. podle definice

$$X * Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X).$$

Odpovědi zdůvodněte.

(5 bodů)

- (3) Řádem prvku g grupy $(G, *, ', e)$ rozumíme nejmenší $n \in \mathbb{N}$ takové, že

$$g^n = \underbrace{g * g * \cdots * g}_n = e.$$

Určete, kolik prvků kterého řádu mají grupy \mathbb{Z}_8 , $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ a dihedrální grupa D_8 .

(5 bodů)