ALGEBRA II (NMAG202) – VZOROVÝ TEST

Tvrzení a definice pečlivě formulujte včetně všech předpokladů. Odpovědi na otázky zdůvodněte. Pokud používáte nějaké netriviální tvrzení z přednášky, uveďte explicitně odkaz (často budete vyzváni, abyste všechna použitá tvrzení zformulovali). Časový limit je 90 minut.

(1) Definujte pojem algebraického prvku nad tělesem a algebraického uzávěru. Přesně formulujte větu o existenci a jednoznačnosti algebraického uzávěru tělesa.

(10 bodů)

(2) Nechť T je těleso a S je jeho rozšíření. Definujte pojem algebraického prvku nad tělesem T. Ukažte, že jsou-li $a, b \in S$ algebraické nad T, je i $a + b$ algebraický prvek nad T.

(10 bodů)

(3) Definujte pojem kongruence na obecné algebře $\mathcal{A}$. Ukažte, že pro každý komutativních okruh R existuje bijekce mezi kongruencemi na R a ideály R.

(15 bodů)

(4) Uvažujte konečné těleso $\mathbb{F}_{27} = \mathbb{F}_3[y]/I$, kde $I = (y^3 + 2y + 1) \cdot \mathbb{F}_3[y]$. Najděte minimální polynom prvku $y^2 + I \in \mathbb{F}_{27}$ nad tělesem $\mathbb{F}_3$.

(15 bodů)

(5) Nechť T je rozkladové nadtěleso polynomu $x^5 - 1 \in \mathbb{Q}[x]$. Určete stupeň rozšíření $[T : \mathbb{Q}]$ a napište nějakou bázi T nad $\mathbb{Q}$.

(15 bodů)

(6) Dokažte, že pro každé prvočíslo p a přirozené číslo n existuje až na isomorfismus jediné těleso o p^n prvcích. Pomocná tvrzení z přednášky pouze zformulujte (bez důkazu).

(20 bodů)