ALGEBRAICKÉ KŘIVKY (NMAG302)
DOMÁCÍ ÚLOHY 2

Termín odevzdání: 20. 4. 2016

(1) Nechť K je těleso. *Přímkou* v $\mathbb{P}^2(K)$ budeme rozumět množinu nul nenulové lineární formy. Ukažte, že
   (a) každými dvěma různými body v $\mathbb{P}^2(K)$ lze proložit právě jednu přímku a
   (b) každě dvě různé přímky v $\mathbb{P}^2(K)$ se protínají právě v jednom bodě.

(2) Nechť K je algebraicky uzavřené těleso a $T\colon K^{n+1} \to K^{n+1}$ je bijektivní K-lineární zobrazení, tj. speciálně

$$T(a_0, a_1, \ldots, a_n) =$$
$$= \big(f_0(a_0, a_1, \ldots, a_n), f_1(a_0, a_1, \ldots, a_n), \ldots, f_n(a_0, a_1, \ldots, a_n)\big)$$

pro nějaké lineární formy $f_0, f_1, \ldots, f_n$. Ukažte, že předpis

$$F\big((a_0 : a_1 : \ldots : a_n)\big) =$$
$$= \big(f_0(a_0, a_1, \ldots, a_n) : f_1(a_0, a_1, \ldots, a_n) : \cdots : f_n(a_0, a_1, \ldots, a_n)\big)$$

určuje dobře definované zobrazení $F\colon \mathbb{P}^n(K) \to \mathbb{P}^n(K)$ a že podmnožina $X \subseteq \mathbb{P}^n(K)$ je algebraická, právě když je podmnožina $F(X) \subseteq \mathbb{P}^n(K)$ algebraická.
(Pozn.: Takovému zobrazení F se říká *projektivní změna souřadnic.*)

(3) Nechť K je algebraicky uzavřené těleso. Ukažte, že máme-li dvě trojice P_1, P_2, P_3 a Q_1, Q_2, Q_3 po dvou různých bodů v $\mathbb{P}^1(K)$, pak existuje projektivní změna souřadnic $F\colon \mathbb{P}^1(K) \to \mathbb{P}^1(K)$ ve smyslu výše taková, že $F(P_i) = Q_i$ pro $i = 1, 2, 3$.