ALGEBRA II (NMAG 202)
OPRAVNÉ ZÁPOČTOVÉ ÚLOHY

(1) Spočtěte, kolika způsoby lze obarvit políčka šachovnice o rozměrech $n \times n$ černou a bílou barvou. Dvě obarvení považujeme za totožná, pokud lze jedno z druhého dostat otočením šachovnice.
(5 bodů)

(2) Kolika způsoby lze obarvit stěny krychle n barvami? Dvě obarvení považujeme za totožná, pokud lze jedno z druhého dostat otočením krychle.
(5 bodů)

(3) Najděte tříprvkovou množinu generátorů algebry $(\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}, +)$ (jakožto algebry s jednou binární operací). Dokažte, že dvouprvková množina generátorů neexistuje.
(5 bodů)

(4) Dokažte, že algebry $(\mathbb{C}, +)$ a $(\mathbb{R}, +) \times (\mathbb{R}, +)$ jsou isomorfní (jakožto algebry s jednou binární operací), avšak algebry $(\mathbb{C}, \cdot)$ a $(\mathbb{R}, \cdot) \times (\mathbb{R}, \cdot)$ isomorfní nejsou.
(5 bodů)

(5) Spočtěte nejmenší normální podgrupu permutační grupy S_5, která obsahuje cyklus $(1\ 2\ 3\ 4)$.
(5 bodů)

(6) Dokažte, že faktorokruh $\mathbb{Z}[i]/2 \cdot \mathbb{Z}[i]$ není obor integrity.
(5 bodů)

(7) Spočtěte stupeň rozkladového nadtělesa T polynomu $x^5 - 11 \in \mathbb{Q}[x]$ a najděte bázi T jakožto vektorového prostoru nad $\mathbb{Q}$.
(5 bodů)

(8) Ukažte, že $\mathbb{Q}(e^{\frac{\pi i}{5}})$ je rozkladové nadtěleso polynomu $x^{10} - 1 \in \mathbb{Q}[x]$. Najděte všechny prvky grupy $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(e^{\frac{\pi i}{5}})/\mathbb{Q})$ a pro každý z nich napište, jak působí na $e^{\frac{\pi i}{5}}$.
(5 bodů)

(9) Najděte všechny prvky grupy $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7})/\mathbb{Q})$ a pro každý z nich napište, jak působí na prvky $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ a $\sqrt{7}$.
(5 bodů)

(10) Nechť T je rozkladové nadtěleso polynomu $x^4 - 7 \in \mathbb{Q}[x]$. Najděte všechna tělesa U taková, že $\mathbb{Q} \subseteq U \subseteq T$.
(5 bodů)