Tvrzení a definice pečlivě formulujte včetně všech předpokladů. Odpovědi na otázky zdůvodněte. Pokud používáte nějaké netriviální tvrzení z přednášky, uveďte explicitně odkaz (často budete vyzváni, abyste všechna použitá tvrzení zformulovali). Časový limit je 150 minut.

1. (2 body) Napište Čínskou větu o zbytcích.

2. (4 body) Napište větu, která popisuje, jak v gaussovských oborech vypadají dělitelé prvku s daným ireducibilním rozkladem.

3. (3 body) Platí pro obor $\mathbb{Z}[i]$ Bézoutova rovnost? Pokud ano, formulujte. Pokud ne, uveďte protipříklad.

4. (4 body) Uveďte dvě ekvivalentní definice pojmu řád prvku.

5. (4 bodů) Existuje svaz bez nejmenšího prvku? Pokud ano, uveďte příklad, pokud ne, stručně zdůvodněte.

6. (3 body) Platí $2x^2 - 1 \parallel x^2 + 2$ a) v oboru $\mathbb{Q}[x]$, b) v oboru $\mathbb{Z}_3[x]$, c) v oboru $\mathbb{Z}_5[x]$?

7. (4 body) Kolik prvků řádu 5 obsahují následující grupy? a) $\mathbf{A}_6$, b) $\mathbb{Z}_{131}^*$.

8. (6 bodů) Kolik podgrup mají následující grupy? a) $\mathbb{Z}_{120}$, b) $\mathbb{Z}_{131}^*$.

9. (6 bodů) Spočtěte $\mathrm{NSD}(13 + i, 5 + 10i)$.

10. (10 bodů) Dokažte, že je grupa A_n $(n \geq 3)$ generovaná

a) množinou všech trojcyklů;

b) množinou trojcyklů $\{(1\ 2\ 3),\ (1\ 2\ 4),\ \ldots,\ (1\ 2\ n)\}$.

11. (12 bodů) Dětská stavebnice obsahuje 9 totožných průhledných čtvercových destiček, na kterých je nakreslená šipka směřující od středu jedné hrany ke středu protilehlé hrany. Kolika způsoby je lze sestavit do velkého čtverce 3×3? Dvě sestavy považujeme za totožné, dostaneme-li jednu z druhé otočením nebo převrácením.

12. (12 bodů)

a) Rozložte polynom $x^8 - 1$ v oboru $\mathbb{Z}_3[x]$.

b) Rozložte polynom $x^9 - 1$ v oboru $\mathbb{Z}_3[x]$.

c) Zdůvodněte, proč lze každý polynom v $\mathbb{Z}_3[x]$ rozložit právě jedním způsobem na součin ireducibilních.

13. (15 bodů) Formulujte a dokažte větu o tom, že obory s NSD a bez nekonečných posloupností vlastních dělitelů jsou gaussovské (jen tuto implikaci).