# Domácí úlohy z Algebraických křivek

*V každé sérii požadujeme padesátiprocentní úspěšnost.*

**3. série, termín odevzdání: 11. 5. 2015.**

Je-li $V$ podprostor dimenze $k+1$ vektorového prostoru $K^{n+1}$ nad tělesem $K$ , pak množině $\mathbb{P}_k = \{(a_0 : a_1 : \cdots : a_n) \in \mathbb{P}^n(K) |\ (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in V\}$ říkáme *podprostor* projektivního prostoru $\mathbb{P}^n(K)$ *dimenze* $k$. Speciálně pro $k = 1$ mluvíme o projektivních přímkách ležících v $\mathbb{P}^n(K)$.

**1.** Je-li $K$ těleso, dokažte, že se v projektivním prostoru $\mathbb{P}^2(K)$ každé dvě různé projektivní přímky protnou právě v jednom bodě a že každými dvěma různými body lze proložit právě jednu přímku.

Uvažujme bijektivní $K$-lineární zobrazení $f : K^{n+1} \to K^{n+1}$ a označme $f_0, \ldots, f_n$ lineární formy, pro které $f = (f_0, f_1 \ldots, f_n)$. Zobrazení $F : \mathbb{P}^n(K) \to \mathbb{P}^n(K)$ dané podmínkou

$$F((a_0 : a_1 : \cdots : a_n)) = (f_0(a_0, \ldots, a_n) : f_1(a_0, \ldots, a_n) : \cdots : f_n(a_0, \ldots, a_n))$$

se nazývá *projektivní změna souřadnic.*

**2.** Dokažte, že je projektivní změna souřadnic na $\mathbb{P}^n(\overline{K})$ dobře definované zobrazení a že $X \subseteq \mathbb{P}^n(\overline{K})$ je projektivní algebraická, právě když je $F(X)$ projektivní algebraická.

**3.** Jestliže $P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbb{P}^2(K)$ a platí, že trojice $P_1, P_2, P_3$ neleží na jedné přímce ani $Q_1, Q_2, Q_3$ neleží na jedné přímce. Dokažte, že existuje taková projektivní změna souřadnic $F : \mathbb{P}^2(K) \to \mathbb{P}^2(K)$, že $F(P_i) = Q_i$ pro všechna $i = 1, 2, 3$.

**2. série, termín odevzdání: 20. 4. 2015.**

**4.** Dokažte, že ideál $(x^{n-1}, x^{n-2}y, x^{n-3}y^2, \dots, xy^{n-2}, y^{n-1})$ okruhu $\mathbb{R}[x, y]$ je generován nejméně $n$ generátory.

**5.** Uvažujme obor $\mathbb{C}[x, y]$. Dokažte, že je $V(y^2 - x^3)$ varieta v afinním prostoru $A^2(\mathbb{C})$ a najděte bijektivní polynomiální zobrazení variety $A^1(\mathbb{C})$ na $V(y^2 - x^3)$ a prostý homomorfismus souřadnicového okruhu variety $V(y^2 - x^3)$ do polynomiálního oboru $\mathbb{C}[t]$. Jsou tato zobrazení izomorfismy?

**6.** Je-li $J = ((x - y^2)^3, (z - y^3)^4) \subseteq \mathbb{R}[x, y, z]$, rozhodněte, zda je $V(J)$ varieta v afinním prostoru $A^3(\mathbb{C})$ a najděte množinu prvoideálů $\mathcal{P}$, aby $IV(J) = \bigcap_{P \in \mathcal{P}} P$.