ALGEBRAICKÉ KřIVKY (NMAG302)
DOMÁCÍ ÚLOHY 1

Termín odevzdání: 23. 3. 2015.

(1) Najděte generátory ideálu $I(X) \subseteq \mathbb{R}[x,y]$, kde $X \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ je sjednocení os x a y. Podobně najděte generátory ideálu $I(Y) \subseteq \mathbb{R}[x,y,z]$, kde $Y \subseteq \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ je sjednocení souřadnicových os x, y a z.

(2) Ukažte, že

$$\begin{aligned} f\colon \quad \mathbb{A}^1(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathrm{V}(\{x^3 + xy - y^2\}) \quad (\subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{R})) \\ t &\longmapsto \big(t(t-1), t^2(t-1)\big) \end{aligned}$$

je dobře definované a surjektivní polynomiální zobrazení. Popište odpovídající zobrazení

$$f^*\colon \mathbb{R}[x,y]/(x^3 + xy - y^2) \longrightarrow \mathbb{R}[t]$$

mezi souřadnicovými okruhy. Odpovědi zdůvodněte.

(3) Ukažte, že $X = \mathrm{V}(\{y^2 - x^3, z - x^2\})$ je ireducibilní algebraická množina v $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$.

(Nápověda: Najděte vhodnou parametrizaci $f\colon \mathbb{A}^1(\mathbb{R}) \to X$ a převeďte problém na ireducibilitu $\mathbb{A}^1(\mathbb{R})$).