NALG017 – ÚVOD DO TEORIE GRUP, ZÁPOČTOVÝ ÚKOL PRO ZS 2009/2010

Termín odevzdání: **18. prosince 2009**

(1) **Hamiltonovské grupy.** Grupy, jejichž každá podgrupa je normální, se nazývají *hamiltonovské* podle irského matematika, fyzika a astronoma W. R. Hamiltona. Víme například, že každá abelovská grupa je hamiltonovská. Cílem cvičení tohoto cvičení je ukázat si příklad neabelovské hamiltonovské grupy.

Buď Q_8 tzv. *grupa kvaternionů*, tj. osmiprvková grupa

$$Q_8 = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\},$$

kde 1 je neutrální prvek a prvky i, j, k se násobí podle tabulky

$\cdot$	i	j	k
i	-1	k	$-j$
j	$-k$	-1	i
k	j	$-i$	-1

To jest $i \cdot i = -1$, $i \cdot j = k$ atd. Násobení prvkem -1 jednoduše mění znaménko. Vaším úkolem je následující:

(a) Nalezněte všechny podgrupy grupy Q_8 a popište jejich svaz.
(b) Ukažte, že každá podgrupa Q_8 je normální.

(2) **Jednoduchost alternujících grup.** Je klasickým výsledkem teorie grup, že alternující grupa A_n pro $n \geq 5$ je jednoduchá, tj. nemá žádné netriviální normální podgrupy. Vaším úkolem je toto v následujících krocích dokázat:

(a) Buď $n \geq 3$ a $\pi = (ab) \circ (cd)$ složení dvou transpozic v S_n (ne nutně disjunktních). Ukažte, že π se dá zapsat jako složenina trojcyklů. Speciálně ukažte, že alternující grupa A_n je generovaná trojcykly.

Pro zbytek příkladu použijeme toto značení: $n \geq 5$ je přirozené číslo a H normální podgrupa alternující grupy A_n.

(b) Ukažte následující: Pokud H obsahuje trojcyklus, pak $H = A_n$.
(c) Předpokládejte, že existuje $\pi \in H$ takové, že se v cyklickém zápisu permutace π vyskytuje cyklus délky alespoň 4, tj.

$$\pi = (a\, b\, c\, d \dots) \dots .$$

Dokažte, že H obsahuje i permutaci tvaru

$$\rho = (b\, c\, a\, d \dots) \dots$$

a vhodným složením permutací π, ρ nebo jejich inverzí dostanete trojcyklus. Vyvoďte, že v tomto případě $H = A_n$.

(d) Předpokládejte, že H obsahuje permutaci, v jejímž cyklickém zápisu se vyskytují alespoň dva trojcykly, tj.

$$\pi = (a\,b\,c)(d\,e\,f)\ldots.$$

Dokažte, že H obsahuje i permutaci tvaru

$$\rho = (a\,b\,d)(c\,f\,e)\ldots$$

a vhodným složením permutací π, ρ nebo jejich inverzí dostanete permutaci, která má v cyklickém zápisu pěticyklus. Vyvoďte za použití bodu (c), že z předpokladu vyplývá $H = A_n$.

(e) Předpokládejte nyní, že H obsahuje permutaci π, v jejímž cyklickém zápisu se kromě transpozic vyskytuje přesně jeden trojcyklus. Ukažte, že π^2 je trojcyklus a opět $H = A_n$.

(f) Předpokládejte, že existuje $\pi \in H$ takové, že cyklický zápis π sestává pouze z transpozic a ty se v něm vyskytují alespoň tři. To jest

$$\pi = (a\,b)(c\,d)(e\,f)\ldots.$$

Ukažte, že složením π s jeho vhodnou konjugací ρ dostaneme permutaci s cyklickým zápisem tvaru

$$(u\,v\,w)(x\,y\,z)\ldots,$$

a tedy $H = A_n$ podle (d).

(g) Nakonec předpokládejte, že H obsahuje složeninu $\pi = (a\,b)(c\,d)$ dvou disjunktních cyklů. Ukažte, že složením π s jeho vhodnou konjugací ρ dostaneme trojcyklus, a tedy opět $H = A_n$.

(h) Použijte body (c)–(g) k důkazu, že A_n je pro $n \geq 5$ jednoduchá grupa.

(3) **Centrum symetrické a alternující grupy.** Ukažte následující:

(a) Centrum $Z(S_n)$ symetrické grupy S_n je triviální pro $n \geq 3$.

(b) Centrum $Z(A_n)$ alternující grupy A_n je triviální pro $n \geq 4$.

Nápověda: Použijte $Z(G) = \{g \in G \colon aga^{-1} = g \text{ pro každé } a \in G\}$.