

SKALÁRNÍ SOUČIN

Pozn.: v dalším textu symbolem x , resp. y značíme n -tici $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, resp. n -tici $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

Příklad 1. Určete, zda jsou následující zobrazení skalárními součiny na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$:

- a) $f(x, y) = x_1y_1 + 3x_2 - 2x_3y_2 + 5, n = 4$
- b) $f(x, y) = 4x_1y_1 + 3x_2^7 + 4x_7y_1, n = 8$
- c) $f(x, y) = x_1y_1 + 3x_2y_3 + 4x_3y_2, n = 3$
- d) $f(x, y) = -5x_1y_1 - 30x_1y_3 - 30x_3y_1, n = 3$
- e) $f(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4, n = 4$
- f) $f(x, y) = x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3, n = 4$
- g) $f(x, y) = x_1y_1 - 4x_1y_3 + 2x_2y_2 - 4x_3y_1, n = 3$

Příklad 2. Bilineární forma f na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ má vzhledem ke kanonické bázi analytické vyjádření

$$f(x, y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 4x_2y_3 + 4x_3y_2 + 9x_3y_3$$

Určete, zda f je skalární součin. V kladném případě řešte další úkoly:

- a) najděte nějakou ortogonální a ortonormální bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$
- b) zjistěte normu vektoru $v = (2, 0, 1)$
- c) zjistěte, zda je vektor $w = (-\sqrt{18}, 1, 1)$ jednotkový
- d) zjistěte, zda jsou vektory $(1, 0, -3)$ a $(3, -2, 1)$ navzájem kolmé
- e) zjistěte, zda množina $\{(1, 0, -3), (3, -2, 1), (1, 0, 0)\}$ je ortogonální podmnožinou vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$
- f) určete ortogonální doplněk prostoru $W_1 = [(1, 1, 2)]$ v prostoru $\mathbb{R}^3$
- g) určete ortogonální doplněk prostoru $W_2 = [(0, 2, 1), (1, 0, 1)]$ v prostoru $\mathbb{R}^3$

Příklad 3. Bilineární forma f na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ má vzhledem ke kanonické bázi analytické vyjádření

$$f(x, y) = 2x_1y_1 + x_2y_2 + 5x_3y_3$$

Určete, zda f je skalární součin. V kladném případě řešte další úkoly:

- a) najděte nějakou ortogonální a ortonormální bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$
- b) zjistěte, zda je vektor $w = (2, 1, 1)$ jednotkový
- c) zjistěte, zda jsou vektory $(1, 0, 1)$ a $(1, 1, -1)$ navzájem kolmé
- d) zjistěte, zda množina $\{(1, 0, 1), (1, 1, -1), (1, 0, 0)\}$ je ortogonální podmnožinou vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$
- e) určete ortogonální doplněk prostoru $W_1 = [(0, 1, 0)]$ v prostoru $\mathbb{R}^3$
- f) určete ortogonální doplněk prostoru $W_2 = [(1, 1, 0), (0, 0, 3)]$ v prostoru $\mathbb{R}^3$
- g) určete úhel, který svírají vektory $v = (2, 1, 0)$ a $u = (0, 1, 0)$
- h) určete parametr $p \in \mathbb{R}$ tak, aby vektory $(2, p, -1)$ a $(-1, p, p - 2)$ byly navzájem kolmé

Příklad 4. Bilineární forma f na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ má vzhledem ke kanonické bázi analytické vyjádření

$$f(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2 + 6x_3y_3 + 4x_4y_4$$

Určete, zda f je skalární součin. V kladném případě řešte další úkoly:

- a) najděte nějakou ortogonální a ortonormální bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$
- b) zjistěte normu vektoru $w = (0, 1, 0, 0)$
- c) zjistěte, zda jsou vektory $(1, 0, 3, 2)$ a $(-1, 1, -2, 2)$ navzájem kolmé
- d) určete ortogonální doplněk prostoru $W_1 = [(2, 1, 0, 1), (0, -1, 0, 4)]$ v prostoru $\mathbb{R}^4$
- e) určete ortogonální doplněk prostoru $W_2 = [(1, 1, 1, 1)]$ v prostoru $\mathbb{R}^4$

VÝSLEDKY:

Příklad 1. a) ne, b) ne, c) ne, d) ne, e) ano, f) ne, g) ne

Příklad 2. f je skalární součin

a) $OG = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, -2, 1)\},$

$$ON = \left\{ (1, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0), (0, -2, 1) \right\}$$

b) $\|v\| = \sqrt{13}$

c) w není jednotkový

d) jsou navzájem kolmé

e) není

f) $W_1^\perp = [(-10, 1, 0), (-22, 0, 1)]$

g) $W_2^\perp = [(-4, -17, 8)]$

Příklad 3. f je skalární součin

a) $OG = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\},$

$$ON = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0), (0, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 0, 1) \right\}$$

b) w není jednotkový

c) nejsou navzájem kolmé

d) není

e) $W_1^\perp = [(1, 0, 0), (0, 0, 1)]$

f) $W_2^\perp = [(-1, 2, 0)]$

g) $\alpha = 70^\circ 32'$

h) $p = 2 \vee p = 3$

Příklad 4. f je skalární součin

a) $OG = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, -2, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\},$

$$ON = \left\{ (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -2, 1, 0), \frac{1}{2}(0, 0, 0, 1) \right\}$$

b) $\|w\| = 1$

c) nejsou navzájem kolmé

d) $W_1^\perp = [(0, -2, 1, 0), (-10, 16, 0, 1)]$

e) $W_2^\perp = [(-3, 1, 0, 0), (-8, 0, 1, 0), (-4, 0, 0, 1)]$

© Martina Škorpilová