PODOBNOST, JORDANŮV KANONICKÝ TVAR, JORDANOVA BÁZE

Příklad 1∗.[1] Najděte Jordanův kanonický tvar a příslušnou Jordanovu bázi matice A nad polem reálných čísel $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

Příklad 2∗. Najděte Jordanův kanonický tvar a příslušnou Jordanovu bázi matice Q nad polem reálných čísel $\mathbb{R}$:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

Příklad 3. Najděte Jordanův kanonický tvar a příslušnou Jordanovu bázi matice L nad polem komplexních čísel $\mathbb{C}$:

$$L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

Příklad 4. Najděte Jordanův kanonický tvar a příslušnou Jordanovu bázi matice T nad polem reálných čísel $\mathbb{R}$:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Příklad 5. Najděte Jordanův kanonický tvar a příslušnou Jordanovu bázi matice K nad polem $\mathbb{Z}_5$:

$$K = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Příklad 6. Rozhodněte, zda je matice V nad polem komplexních čísel $\mathbb{C}$ diagonalizovatelná. Odpovíte-li kladně, najděte Jordanův kanonický tvar této matice a příslušnou Jordanovu bázi.

$$V = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -9 \\ 3 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

[1] Příklady označené ∗, tj. příklady č. 1 a 2, jsou převzaty z publikace Proskurjakov, I. V.: *Sbornik zadač po linějnoj algebre*, Moskva, 1974.

Příklad 7. Rozhodněte, zda je matice Z nad polem komplexních čísel $\mathbb{C}$ diagonalizovatelná. Odpovíte-li kladně, najděte Jordanův kanonický tvar této matice a příslušnou Jordanovu bázi.

$$Z = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 10 \\ 10 & 3 & -10 \\ -5 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Příklad 8. Rozhodněte, zda je matice D nad polem $\mathbb{Z}_3$ diagonalizovatelná. Odpovíte-li kladně, najděte Jordanův kanonický tvar této matice a příslušnou Jordanovu bázi.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad 9. Určete, zda jsou následující matice nad polem komplexních čísel $\mathbb{C}$ podobné. Odpovíte-li kladně, najděte Jordanův kanonický tvar těchto matic.

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad 10. Určete, zda jsou matice H a J nad polem komplexních čísel $\mathbb{C}$ podobné, víte-li, že J je Jordanův kanonický tvar matice H.

Příklad 11. Určete, zda jsou následující matice nad polem komplexních čísel $\mathbb{C}$ podobné. Odpovíte-li kladně, najděte Jordanův kanonický tvar těchto matic.

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Příklad 12. Určete, zda jsou následující matice nad polem $\mathbb{Z}_3$ podobné. Odpovíte-li kladně, najděte Jordanův kanonický tvar těchto matic.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad 13. Určete, zda jsou následující matice nad polem reálných čísel $\mathbb{R}$ podobné. Odpovíte-li kladně, najděte Jordanův kanonický tvar těchto matic.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 14 & -5 \end{pmatrix}$$

Příklad 14. Určete matici H nad polem reálných čísel $\mathbb{R}$, víte-li, že její Jordanův kanonický tvar J vzhledem k bázi $M = \{(2,\ 0,\ 1),\ (-1,\ 1,\ 1),\ (1,\ 0,\ 0)\}$ je

$$J = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Příklad 15. Určete matici Q nad polem $\mathbb{Z}_3$, víte-li, že její Jordanův kanonický tvar J vzhledem k bázi $M = \{(1,\ 2,\ 2, 0),\ (0,\ 2,\ 1,\ 1),\ (0,\ 1,\ 0,\ 0),\ (0,\ 0,\ 0,\ 1)\}$ je

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

VÝSLEDKY:

Příklad 1.

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{např. } \mathcal{J} = \{(-1;\ -1;\ 0),\ (1;\ 2;\ 3),\ (1;\ 1;\ 1)\}$$

Příklad 2.

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{např. } \mathcal{J} = \{(4;\ -1;\ 0),\ (3;\ -1;\ 0),\ (3;\ 1;\ 1)\}$$

Příklad 3.

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{např. } \mathcal{J} = \{(0,\ 0,\ 1),\ (-2,\ -1,\ -1),\ (-1,\ -1,\ 1)\}$$

Příklad 4. Matice T nad polem reálných čísel $\mathbb{R}$ nemá Jordanův kanonický tvar.

Příklad 5.

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{např. } \mathcal{J} = \{(3,\ 2,\ 0),\ (0,\ 2,\ 0),\ (2,\ 0,\ 1)\}$$

Příklad 6. Ano.

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}, \qquad \text{např. } \mathcal{J} = \{(-1,\,1,\,0),\ (0,\,1,\,0),\ (1,\,-1,\,1)\}$$

Příklad 7. Ano.

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \text{např. } \mathcal{J} = \{(2,\,-2,\,1),\ (0,\,1,\,0),\ (1,\,0,\,1)\}$$

Příklad 8. Ne. (Neboť minimální polynom matice D je $m(\lambda) = \lambda^2(\lambda+1)$. Nebo můžeme postupovat jiným způsobem: určíme počet lineárně nezávislých vlastních vektorů příslušných k jednotlivým vlastním číslům - k vlastnímu číslu 0 i k vlastnímu číslu 2 přísluší vždy jen jeden lineárně nezávislý vlastní vektor.
Kdybychom chtěli určit Jordanův kanonický tvar, tak platí

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

což skutečně není diagonální matice.)
Příklad 9. Ne.
Příklad 10. Ano.
Příklad 11. Ne.
Příklad 12. Ne.
Příklad 13. Ano.

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Příklad 14.

$$H = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Příklad 15.

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$