

ZOBRAZENÍ TĚLES
V PRAVOÚHLÉ AXONOMETRII
II

Martina Škorpilová

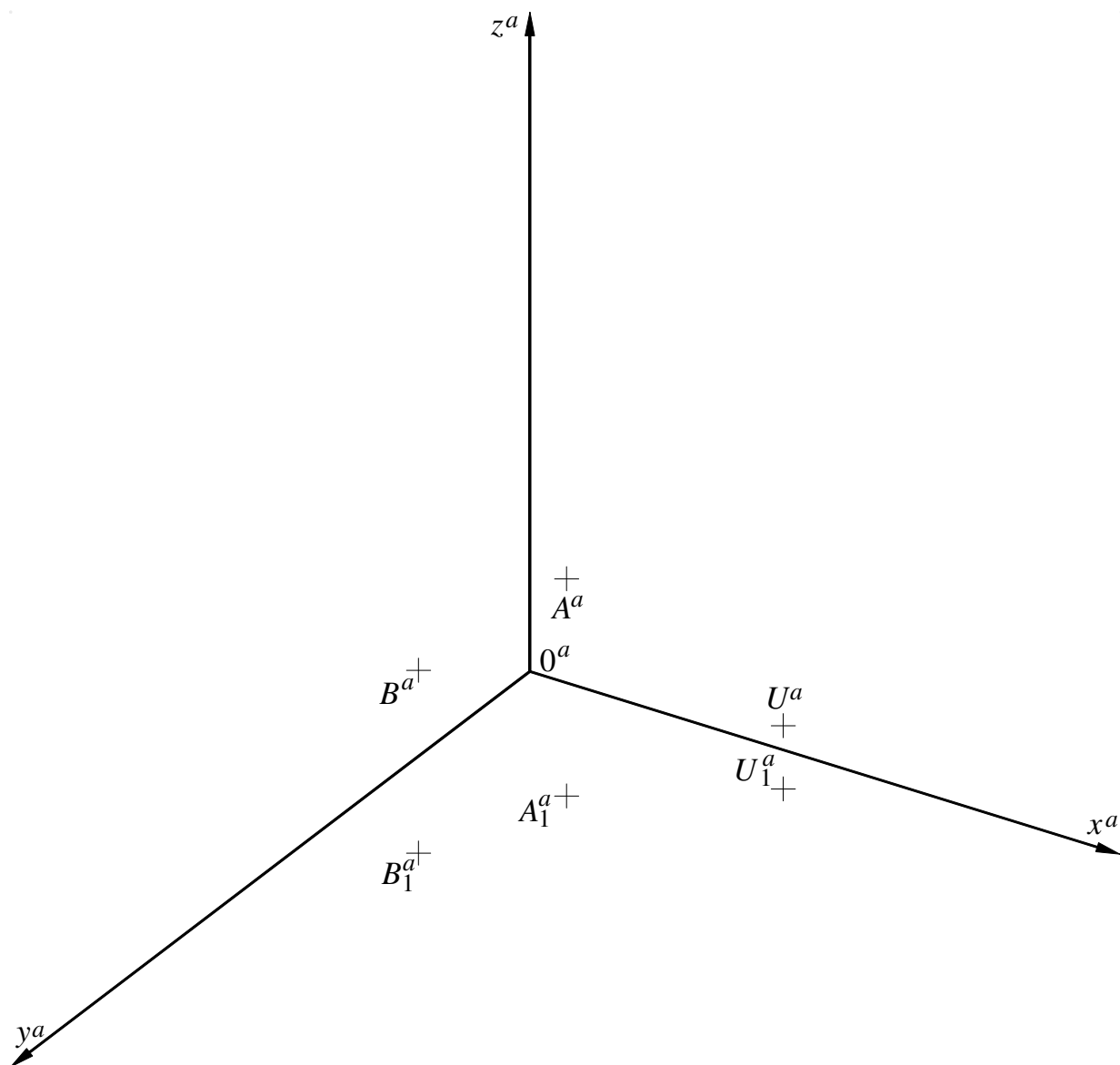
Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy

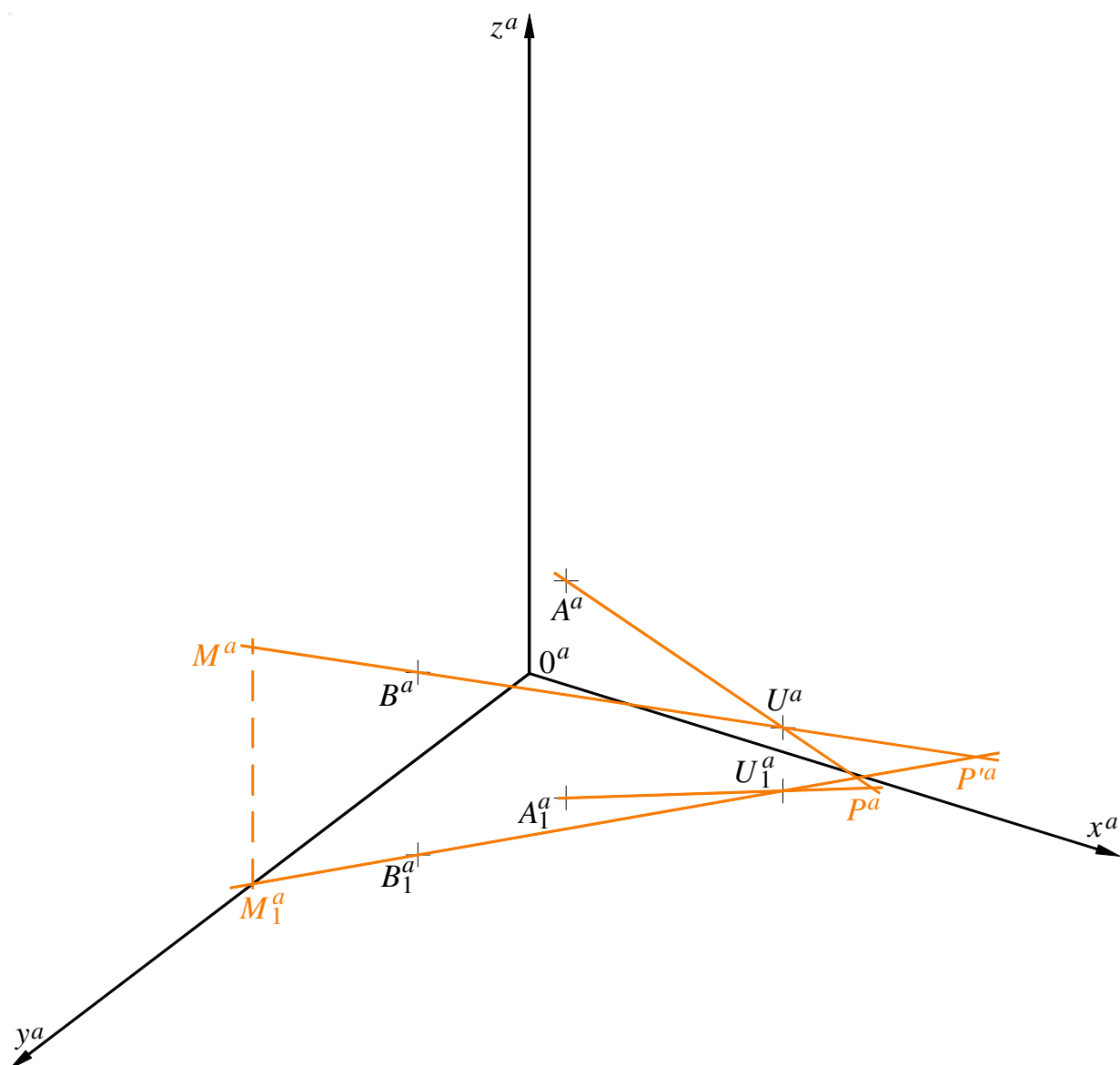
Praha

2024

Studijní text *Zobrazení těles v pravouhlé axonometrii II* patří mezi řadu materiálů, které obsahují krokovaná a podrobně slovně popsaná řešení úloh z deskriptivní geometrie. Svým obsahem přirozeně navazuje na materiál *Zobrazení těles v pravouhlé axonometrii*, který byl napsán v roce 2023, a proto jsou cíle, zaměření či nutné vstupní znalosti čtenářů obou textů stejné.

Příklad 1. V pravoúhlé axonometrii sestrojte axonometrický průmět hvězdicového mnohoúhelníku $\{8, 3\}$ se sousedními vrcholy A, B ležícího v rovině, v níž leží bod U . Sestrojte takové řešení, aby všechny nezadané vrcholy mnohoúhelníku měly větší z -ovou souřadnici než vrchol B .

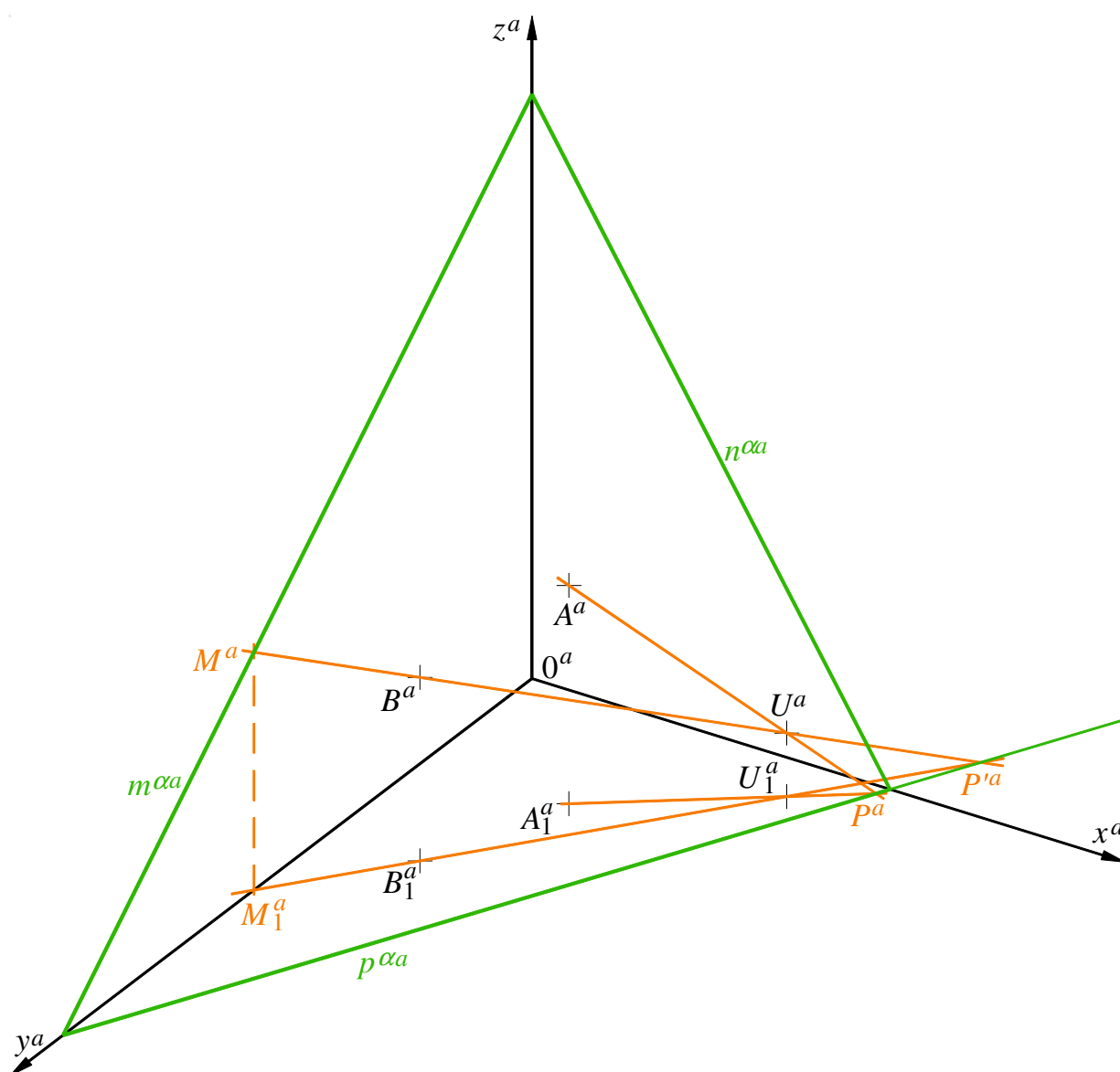




Hvězdicový mnohoúhelník $\{8, 3\}$ leží v rovině určené body A, B, U . Sestrojíme stopy této roviny (viz dále), kterou nazveme α .

Její půdorysná stopa je určena půdorysnými stopníky dvou přímek této roviny, a to například přímek AU a BU . Sestrojíme tedy axonometrický průmět (což je současně i axonometrický půdorys) P^a přímky AU , a to jako průsečík axonometrického průmětu A^aU^a s axonometrickým půdorysem $A_1^aU_1^a$ přímky AU . Obdobně axonometrický průmět (a také axonometrický půdorys) P'^a přímky BU je průsečík axonometrického průmětu B^aU^a s axonometrickým půdorysem $B_1^aU_1^a$ přímky BU .

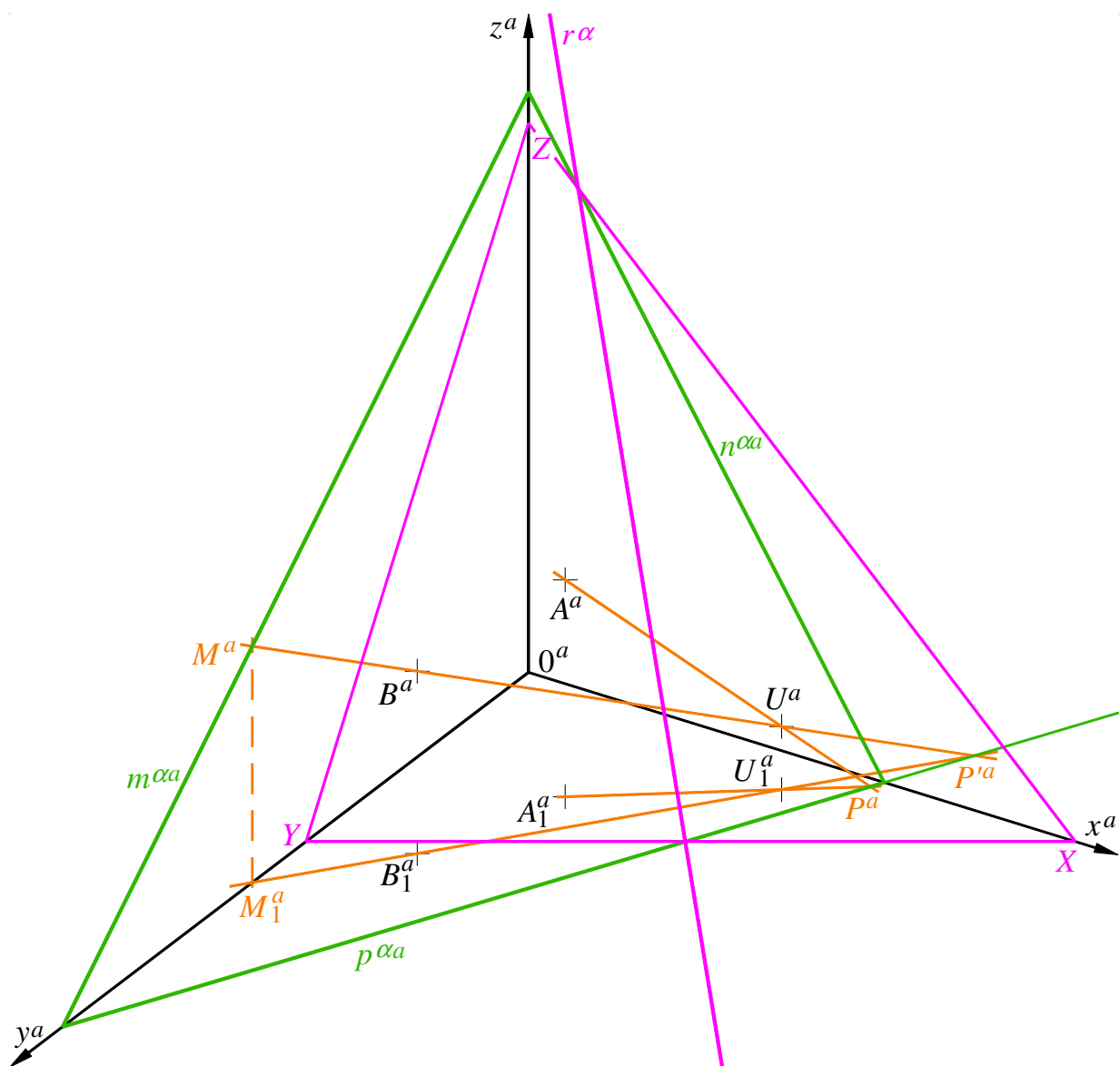
K sestrojení axonometrického průmětu m^{aa} bokorysné stopy roviny α je nutné znát bokorysný stopník jedné z přímek roviny α . Na obrázku je sestrojen axonometrický půdorys M_1^a a následně axonometrický průmět M^a bokorysného stopníku M přímky BU .



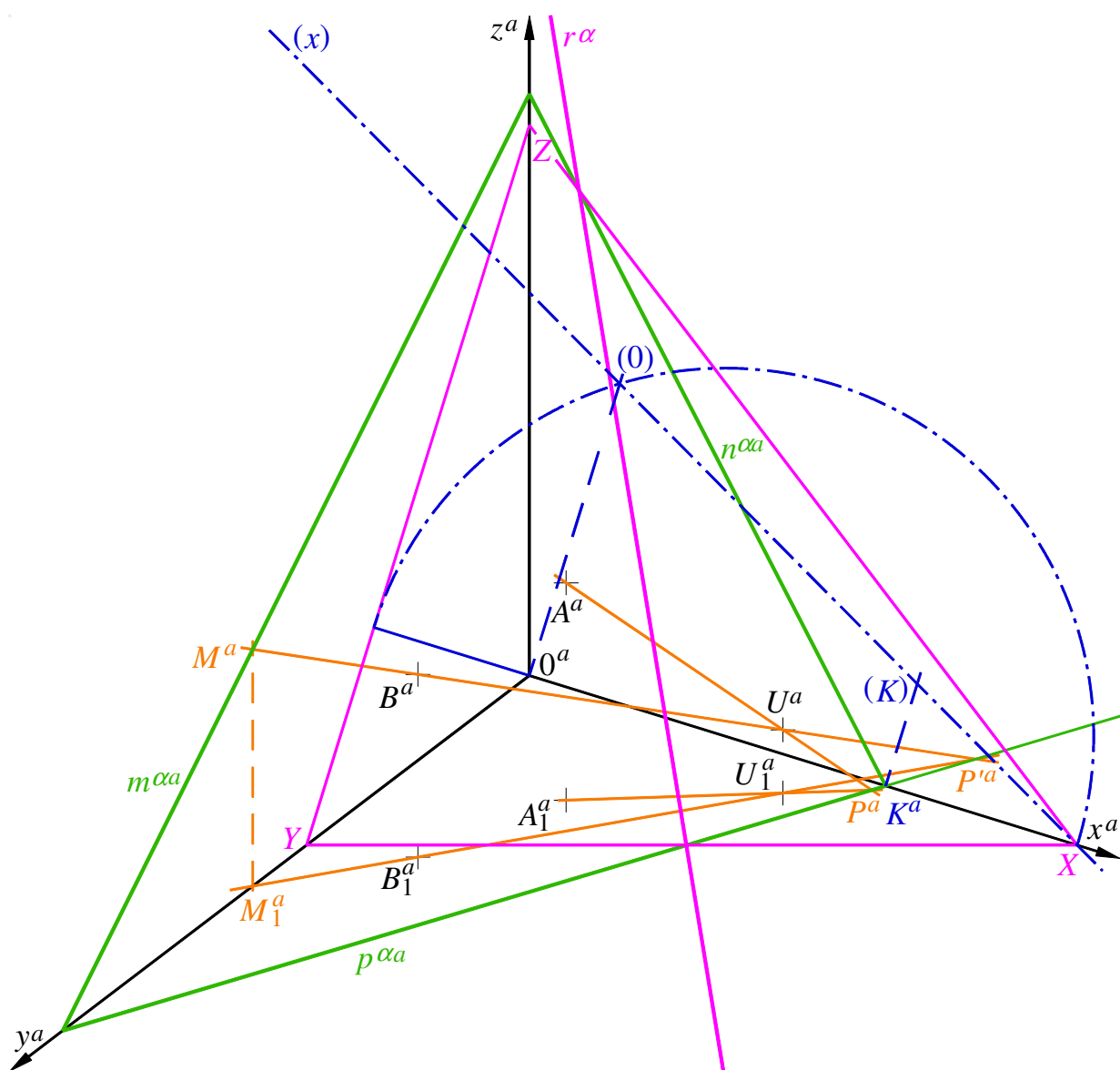
Axonometrickými průměty P^a, P'^a půdorysných stopníků P, P' přímek AU, BU je určen axonometrický průmět p^{aa} půdorysné stopy p^α roviny α .

Spojíme-li axonometrický průmět M^a bokorysného stopníku M přímkou BU a dále průsečík axonometrického průmětu p^{aa} půdorysné stopy p^α s axonometrickým průmětem y^a osy y souřadnicového systému, získáme axonometrický průmět $m^{\alpha a}$ bokorysné stopy m^α roviny α .

Axonometrický průmět $n^{\alpha a}$ nárysne stopy n^α roviny α je určen průsečíky dosud sestrojených axonometrických průmětů $p^{aa}, m^{\alpha a}$ stop roviny α s axonometrickými průměty po řadě x^a, z^a os x, z souřadnicového systému.

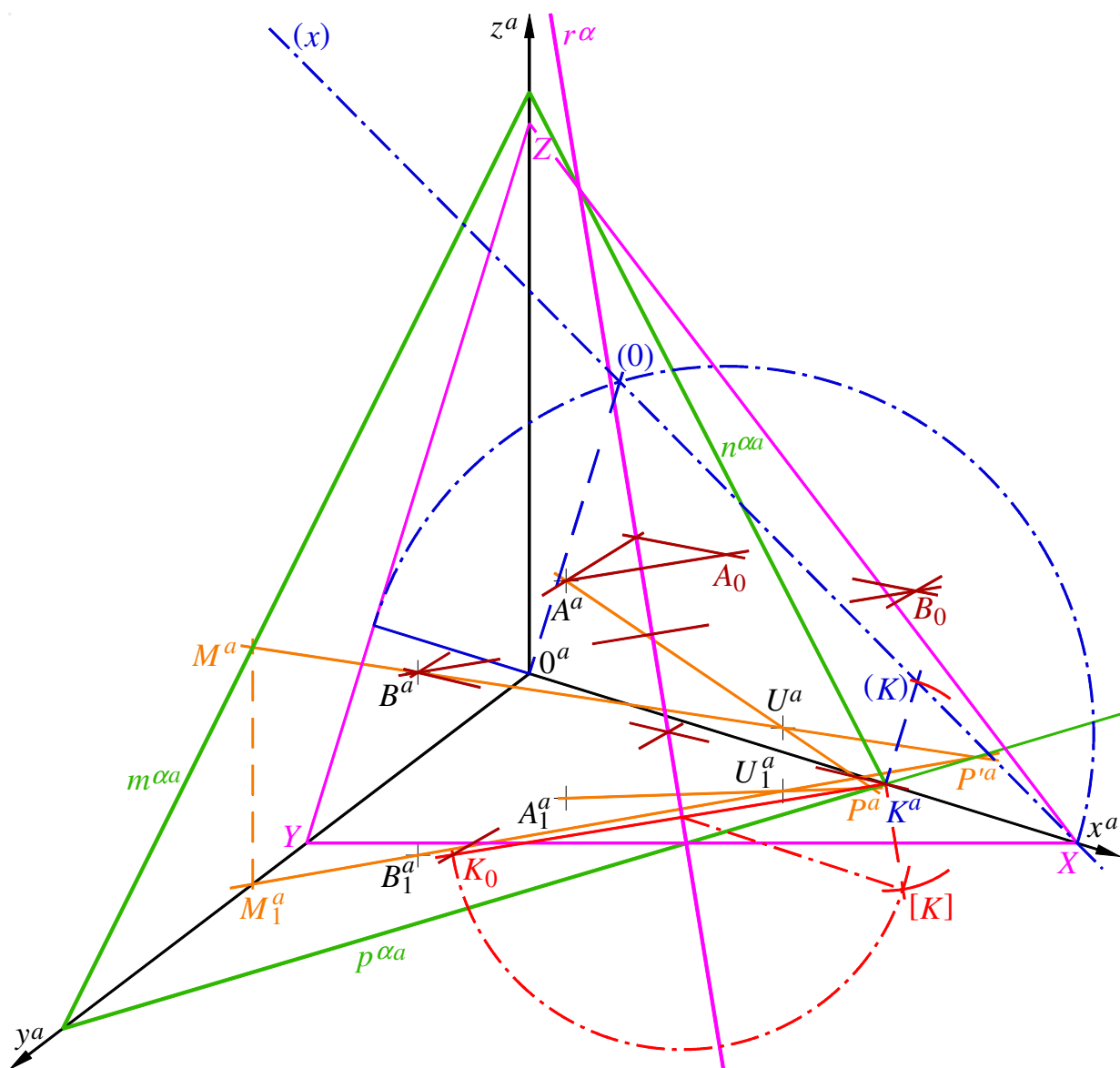


Rovinu α je nutné otočit kolem její axonometrické stopy do axonometrické průmětny. Pomocí axonometrického trojúhelníku XYZ proto zvolíme axonometrickou průmětnu a sestojíme její axonometrickou stopu $r^\alpha = r^{\alpha a}$.

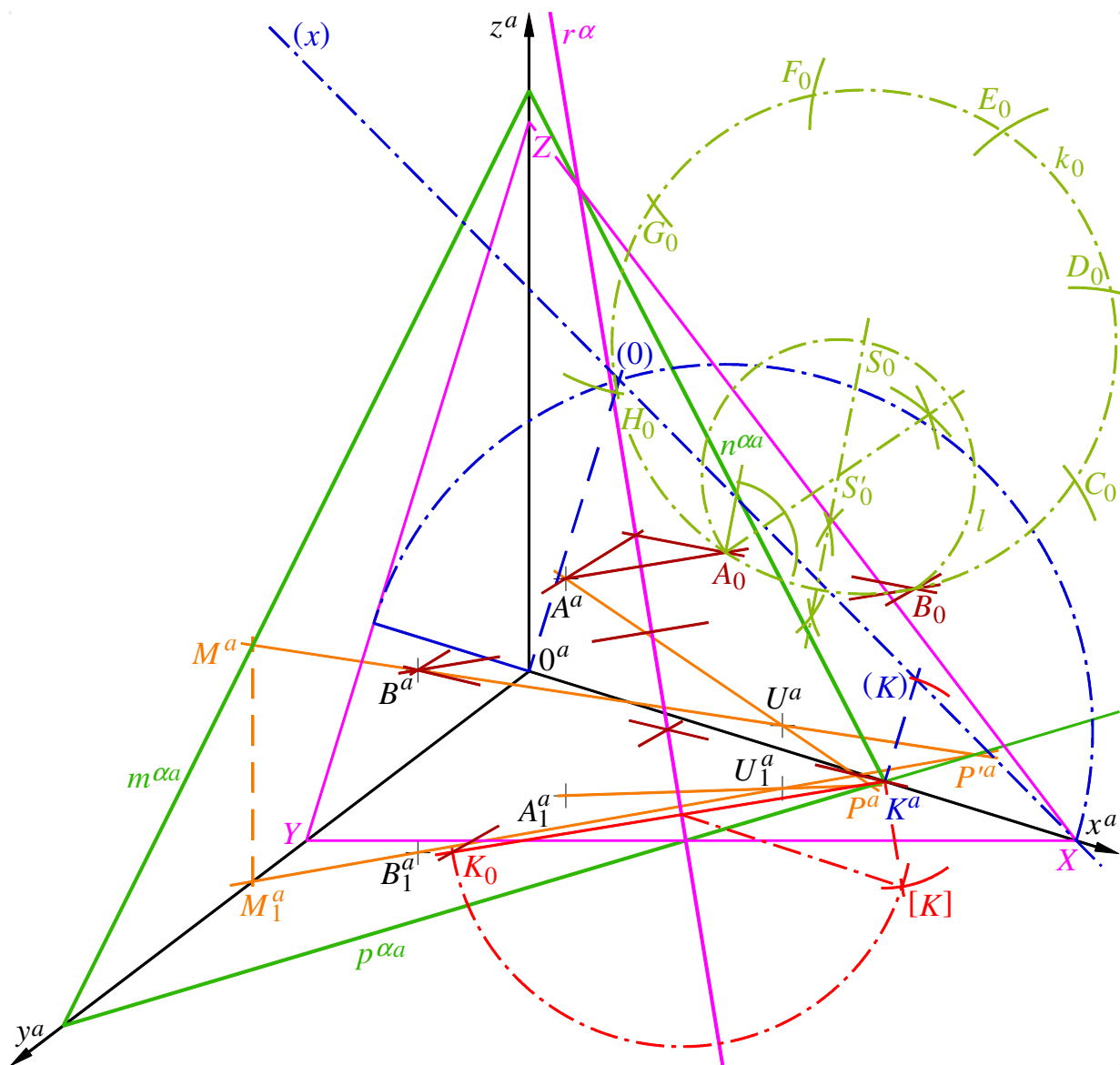


Nyní můžeme rovinu α otočit kolem její axonometrické stopy do axonometrické průmětny.

Otočme nejprve průsečík K roviny α s osou x . Sklopíme axonometricky promítací rovinu osy x do axonometrické průmětny. Pro sklopenou osu (x) přitom platí $(x) = (0)X$. Na sklopené ose (x) nalezneme sklopený bod (K) . Jeho vzdálenost od axonometrického průmětu K^a bodu K je rovna vzdálenosti bodu K od axonometrické průmětny.



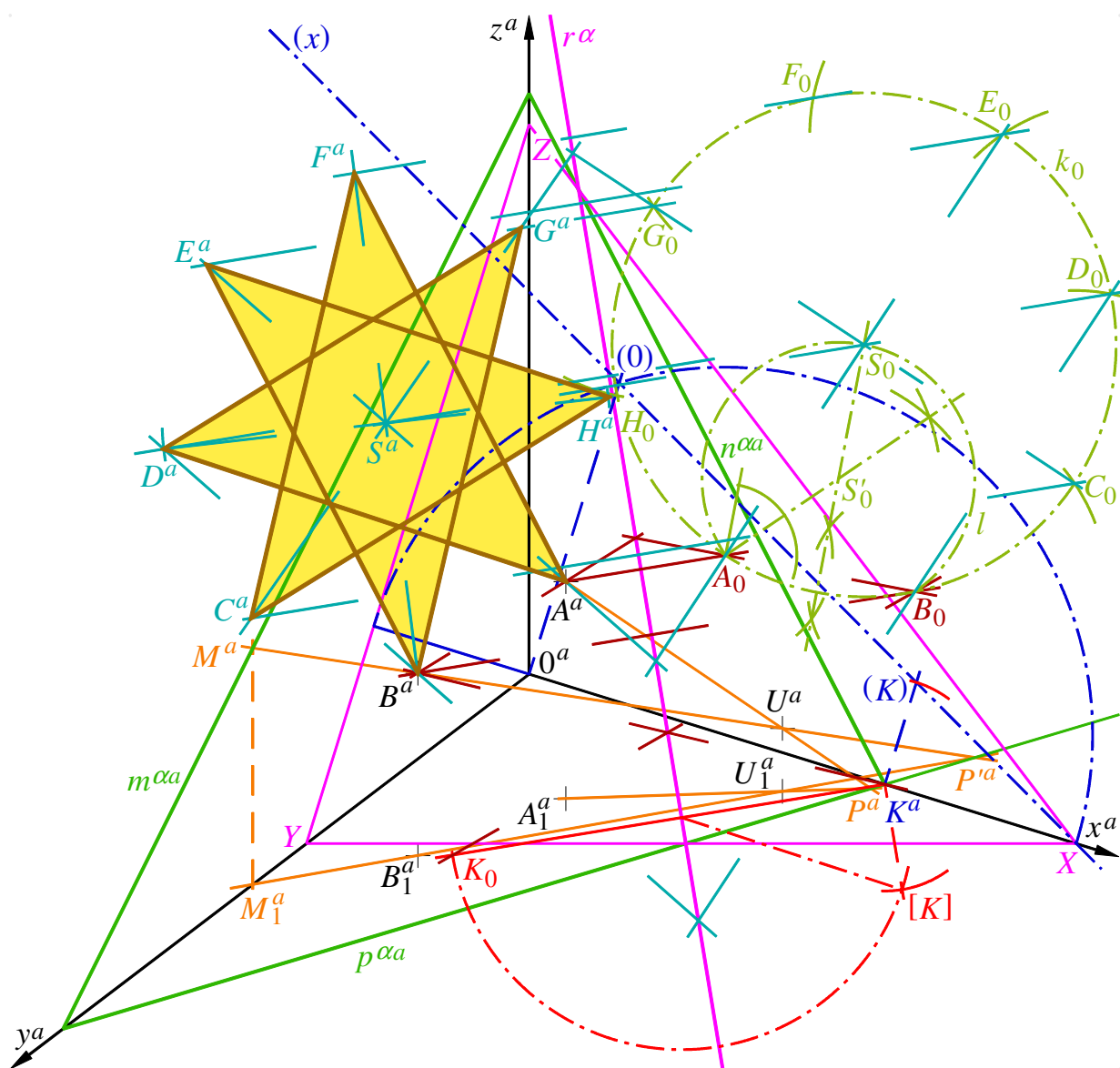
Pomocí osové afinity v rovině, jejíž osou je axonometrická stopa r^α roviny α a v níž si odpovídají body K^a , K_0 , zobrazíme body A^a a B^a neboli nalezneme otočené vrcholy A_0 , B_0 hvězdicového osmiúhelníku.



Nyní nalezneme otočený bod S_0 , kde S je střed souměrnosti hvězdicového osmiúhelníku. Bod S_0 leží jednak na ose úsečky A_0B_0 a dále na kružnicovém oblouku l , který je množinou bodů, z nichž je úsečka A_0B_0 vidět pod úhlem $360^\circ : 8 = 45^\circ$ (ze dvou možností přitom uvažujeme takový kružnicový oblouk, aby byla splněna podmínka kladená na z -ové souřadnice vrcholů hvězdicového osmiúhelníku).

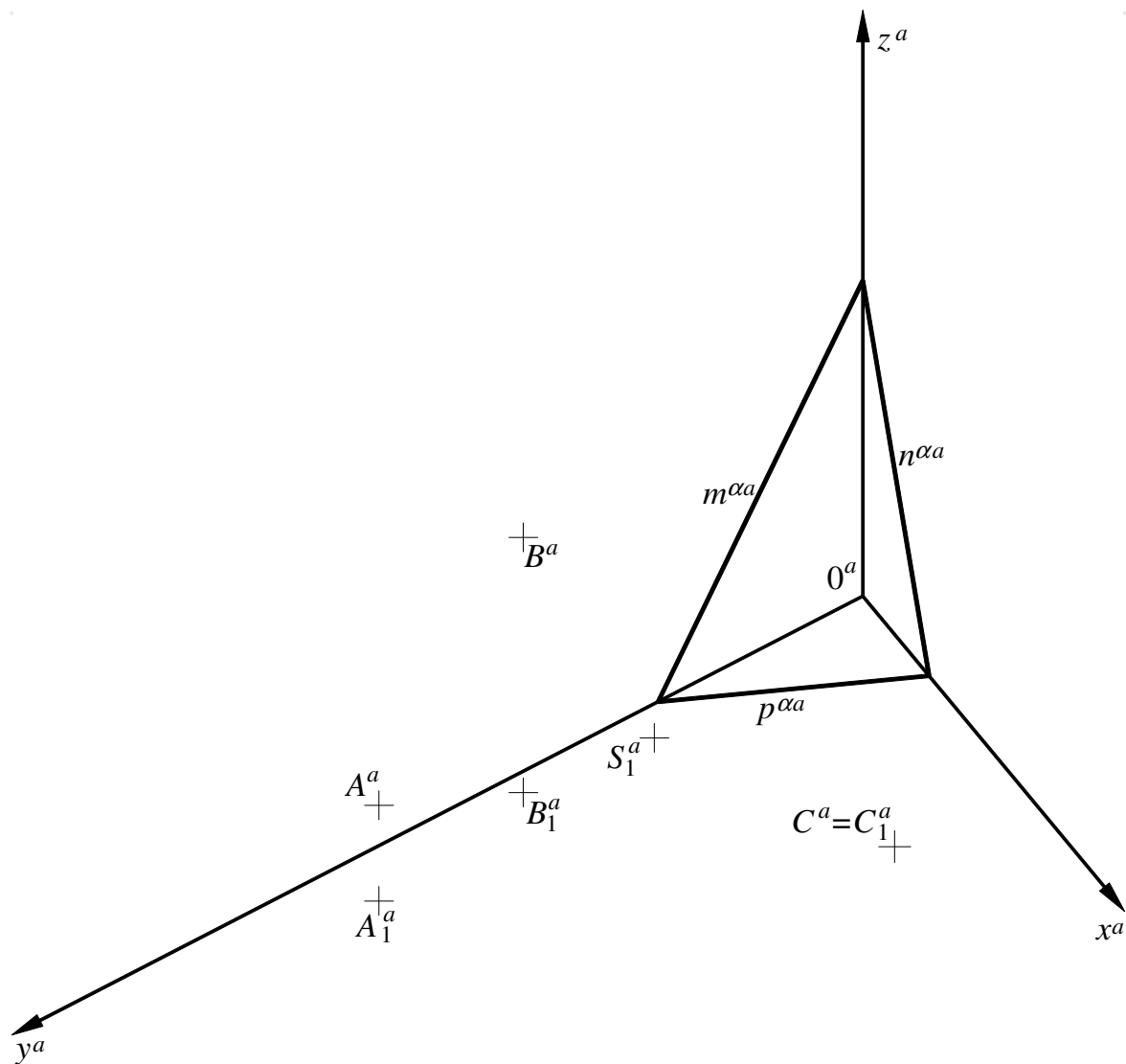
Sestrojíme kružnici k_0 o středu S_0 procházející body A_0, B_0 , na níž leží otočené zbývající vrcholy mnohoúhelníku. Tyto body C_0, D_0, E_0, F_0, G_0 a H_0 nalezneme jako vrcholy pravidelného konvexního osmiúhelníku vepsaného kružnici k_0 .

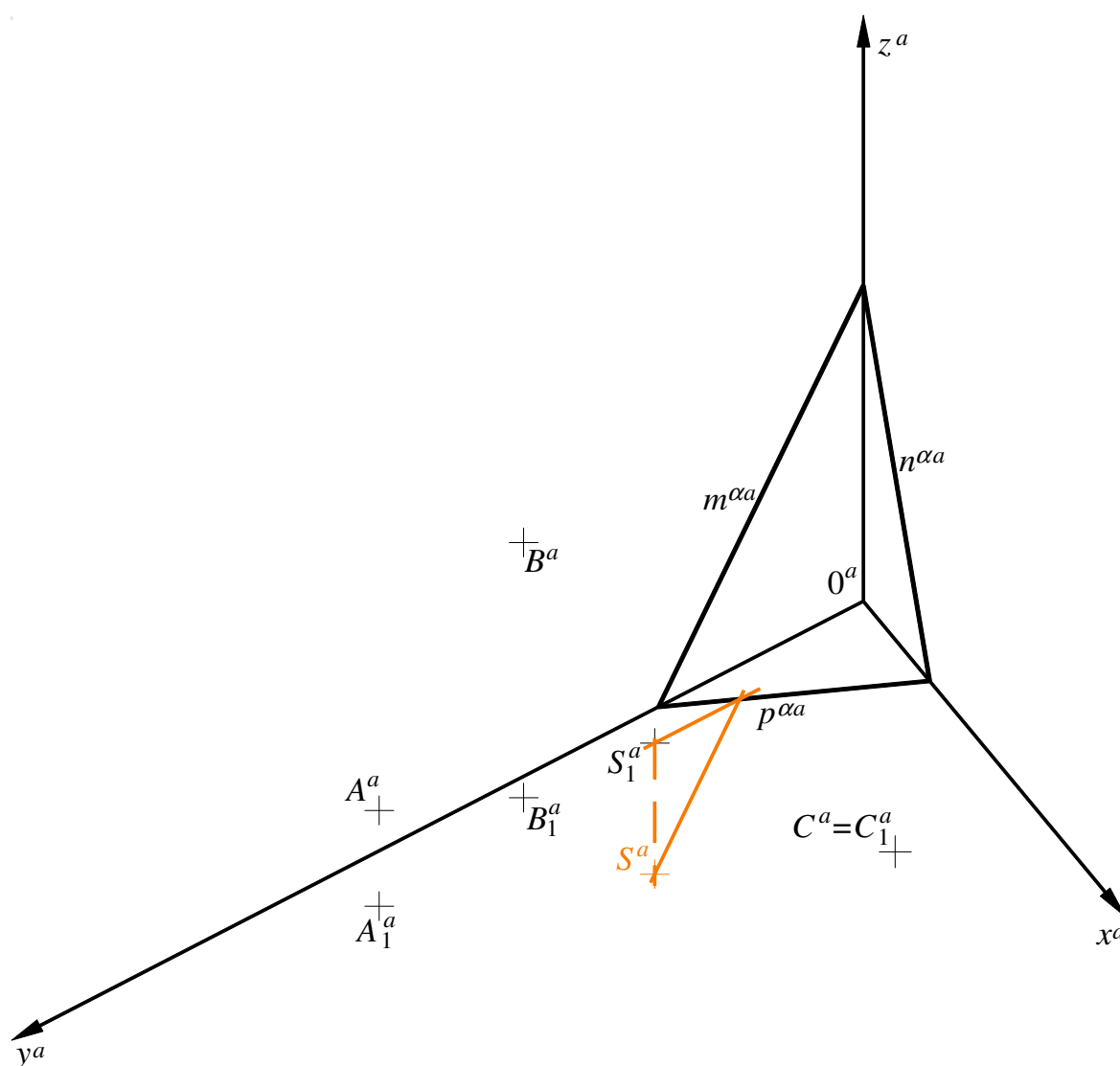
11



Nyní stačí sestrojit spojnice bodů $A^a, B^a, C^a, D^a, E^a, F^a, G^a, H^a$ ve správném pořadí. Jelikož sestrojujeme axonometrický průmět hvězdicového osmiúhelníku $\{8, 3\}$, spojíme libovolný z axonometrických průmětů vrcholů mnohoúhelníku – např. bod A^a – s bodem, který je od něj třetí v pořadí při pohybu (v libovolném ze dvou směrů) po elipse, která v uvedené osové afinitě odpovídá kružnici k_0 . Tímto způsobem nalezneme i další spojnice axonometrických průmětů vrcholů mnohoúhelníku, dokud se nevrátíme do výchozího bodu A^a , a tedy dokud není sestrojen axonometrický průmět hvězdicového mnohoúhelníku $\{8, 3\}$.

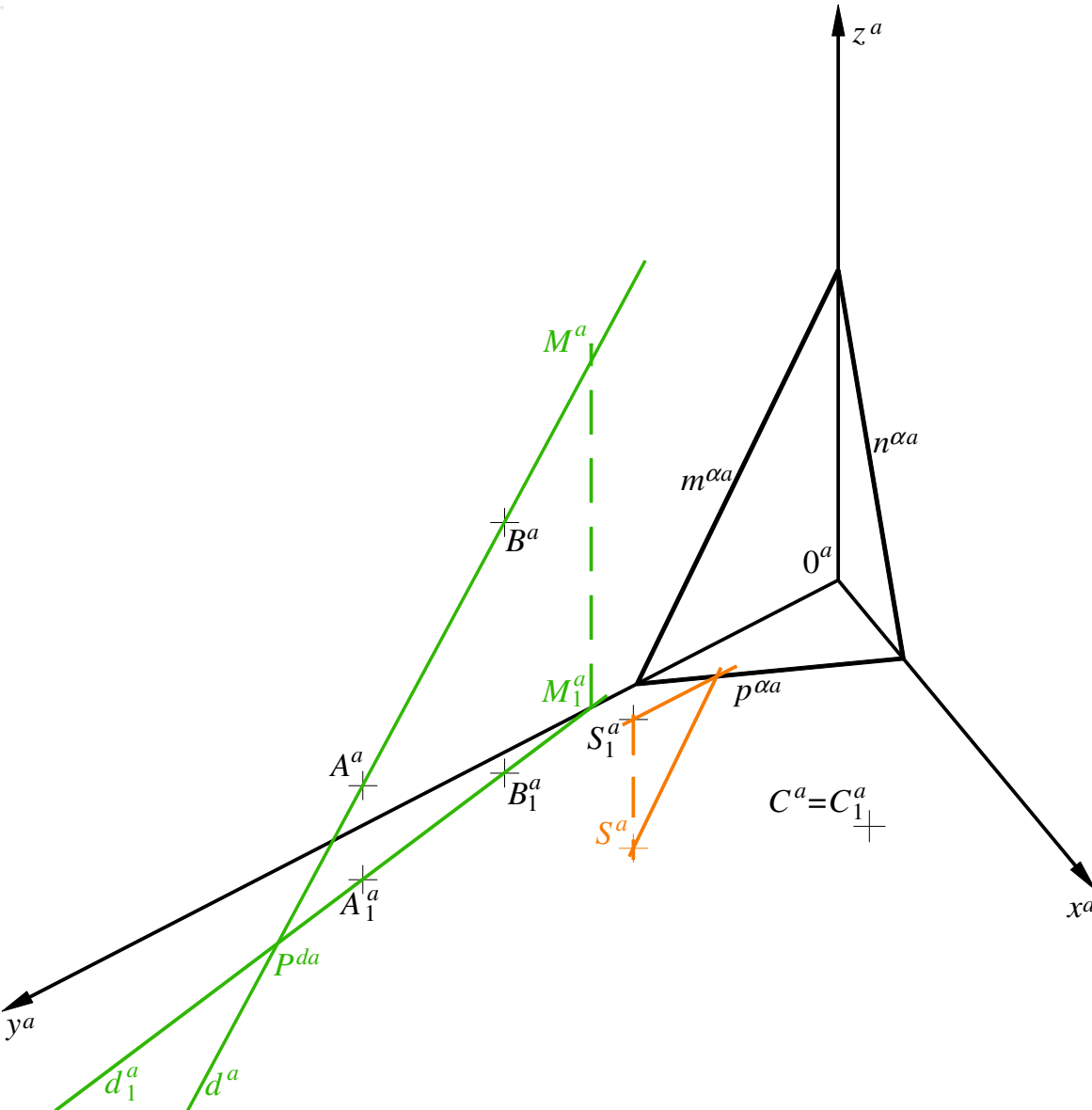
Příklad 2. V pravoúhlé axonometrii sestrojte axonometrický průmět koule κ o středu S , která se dotýká roviny $\beta = (ABC)$. Bod S leží v dané rovině α .



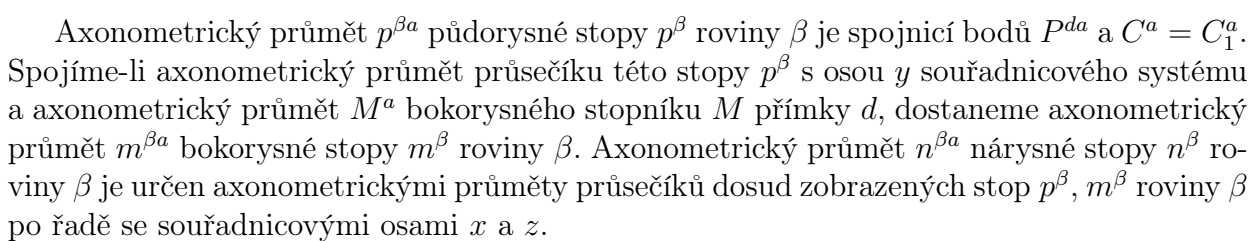


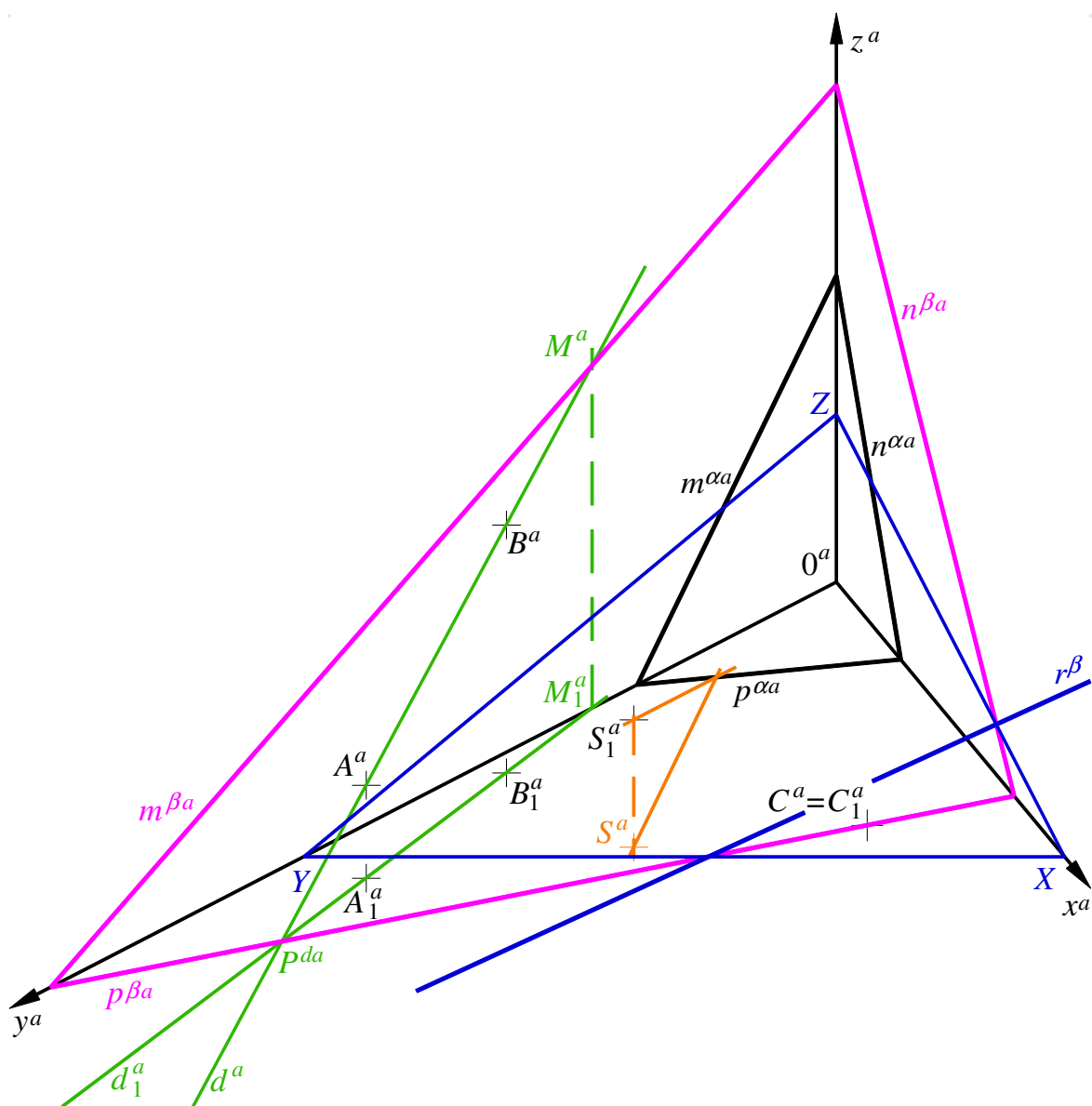
Axonometrickým průmětem koule je kruh, jehož středem je axonometrický průmět S^a bodu S a jehož poloměr je roven vzdálenosti bodu S od roviny β .

Sestrojme nejprve axonometrický průmět S^a středu S koule, a to například pomocí hlavní přímky třetí osnovy roviny α .



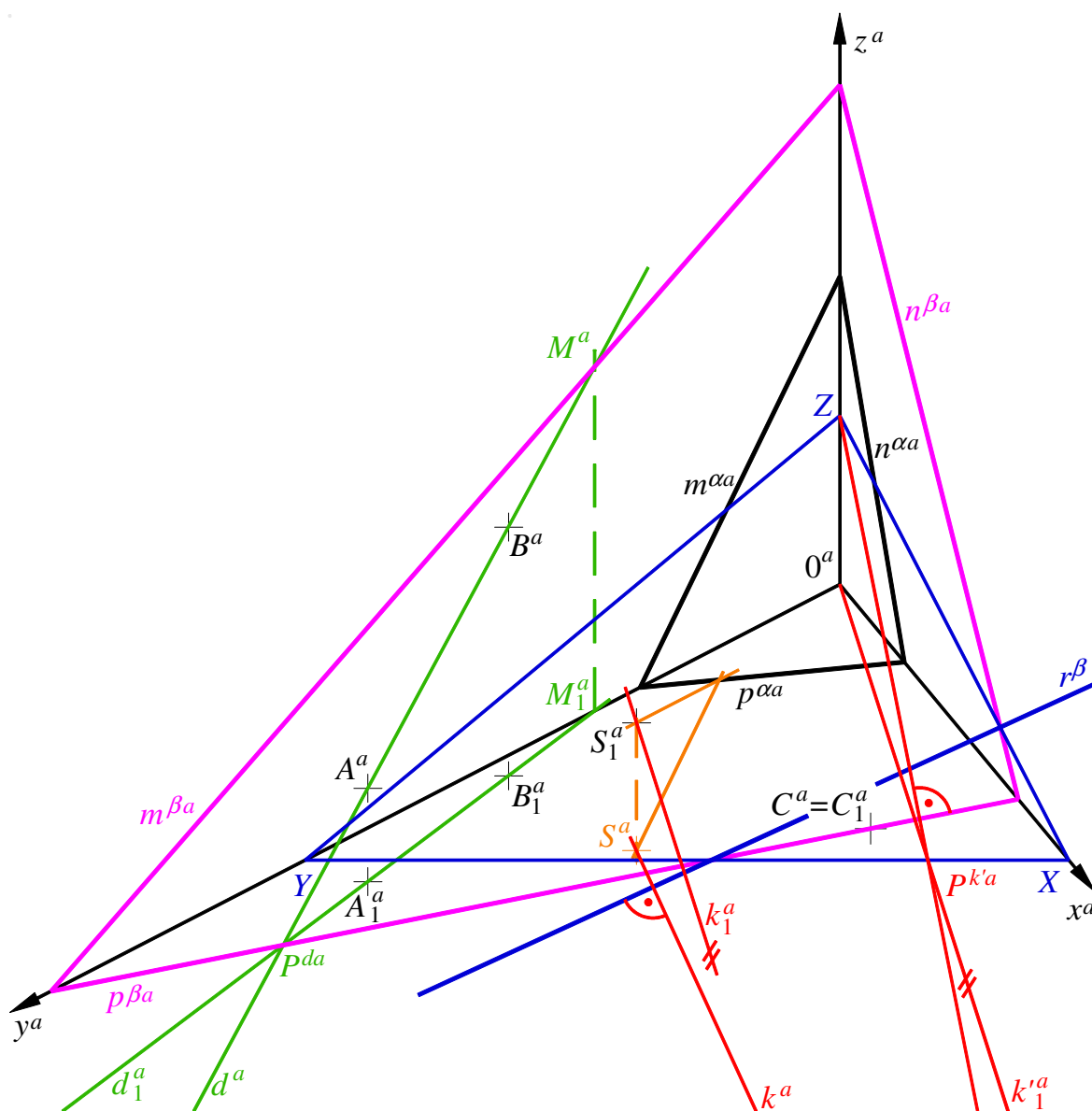
Nyní sestrojíme stopy roviny $\beta = (ABC)$. Její půdorysná stopa prochází bodem C , který leží v půdorysně. Nalezneme další bod půdorysné stopy, a to například půdorysný stopník P^d přímky $d = AB$ roviny β . Sestrojíme proto axonometrický průmět $d^a = A^a B^a$ a axonometrický půdorys $d_1^a = A_1^a B_1^a$ přímky $d = AB$ a jejich průsečík P^{da} je axonometrickým průmětem (a také axonometrickým půdorysem) půdorysného stopníku P^d přímky d . Dále určíme například axonometrický půdorys M_1^a a následně axonometrický průmět M^a bokorysného stopníku M přímky d .





Dále chceme určit poloměr koule κ , tj. vzdálenost jejího středu S od roviny β . Bodem S proto vedeme kolmici k na rovinu β a sestrojíme její průsečík Q s rovinou β (viz dále). Poloměr koule je roven vzdálenosti bodů S a Q .

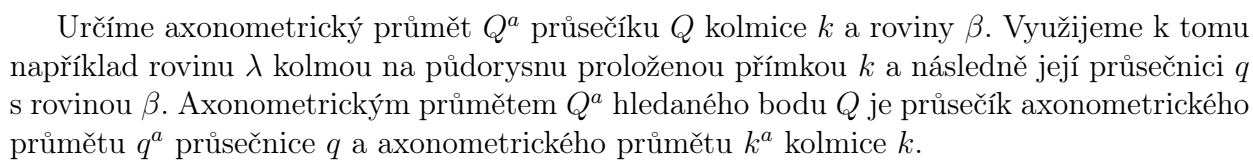
K sestrojení kolmice k potřebujeme axonometrickou stopu roviny β . Zvolíme proto axonometrický trojúhelník XYZ a sestrojíme axonometrickou stopu $r^\beta = r^{\beta a}$ roviny β .

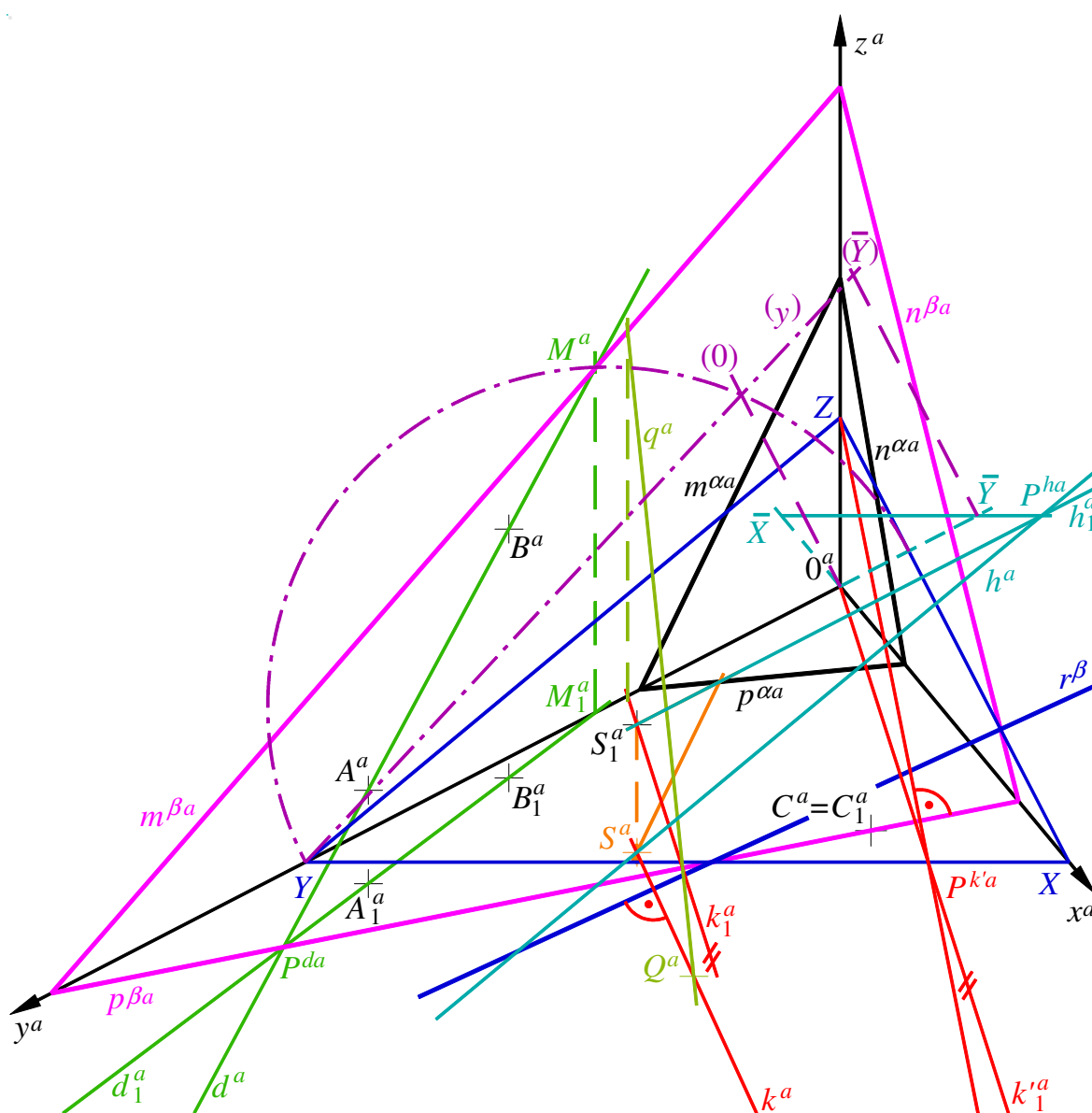


Nyní bodem S povedeme kolmici k na rovinu β . Její axonometrický průmět k^a prochází axonometrickým průmětem S^a bodu S a je kolmý na axonometrickou stopu $r^\beta = r^{\beta a}$ roviny β .

Dále sestrojíme axonometrický půdorys k_1^a kolmice k . Směr přímky k_1^a je směrem axonometrických průmětů přímek, které leží v půdorysně a jsou kolmé na půdorysnou stopu p^β roviny β . Tento směr určíme některým ze známých postupů. Mezi přímky tohoto směru patří např. spojnice $k_1'^a$ axonometrického průmětu 0^a počátku 0 souřadnicového systému a průsečíku $P^{k'a}$ strany XY axonometrického trojúhelníku XYZ s kolmicí na axonometrický průmět $p^{\beta a}$ půdorysné stopy p^β roviny β vedenou vrcholem Z axonometrického trojúhelníku.

Axonometrický půdorys k_1^a kolmice k je rovnoběžný s přímkou $k_1'^a$ a prochází axonometrickým půdorysem S_1^a bodu S .



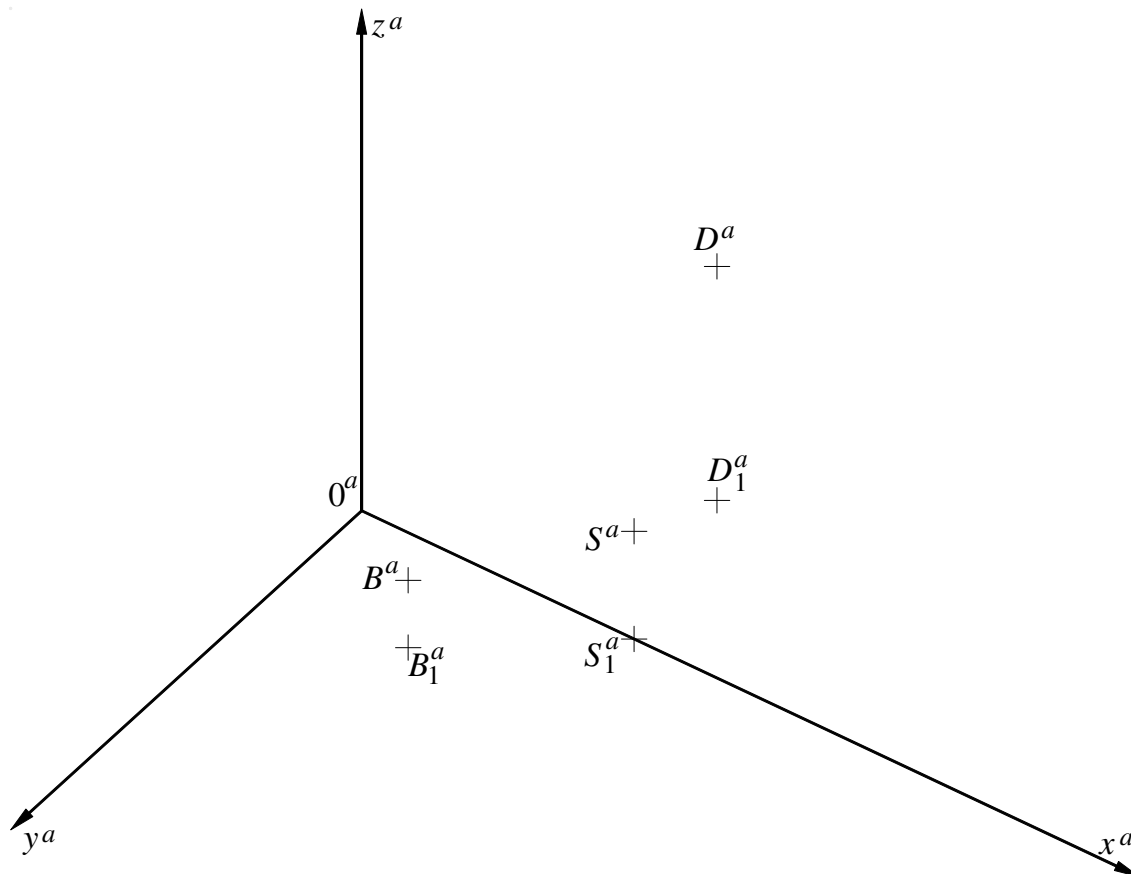


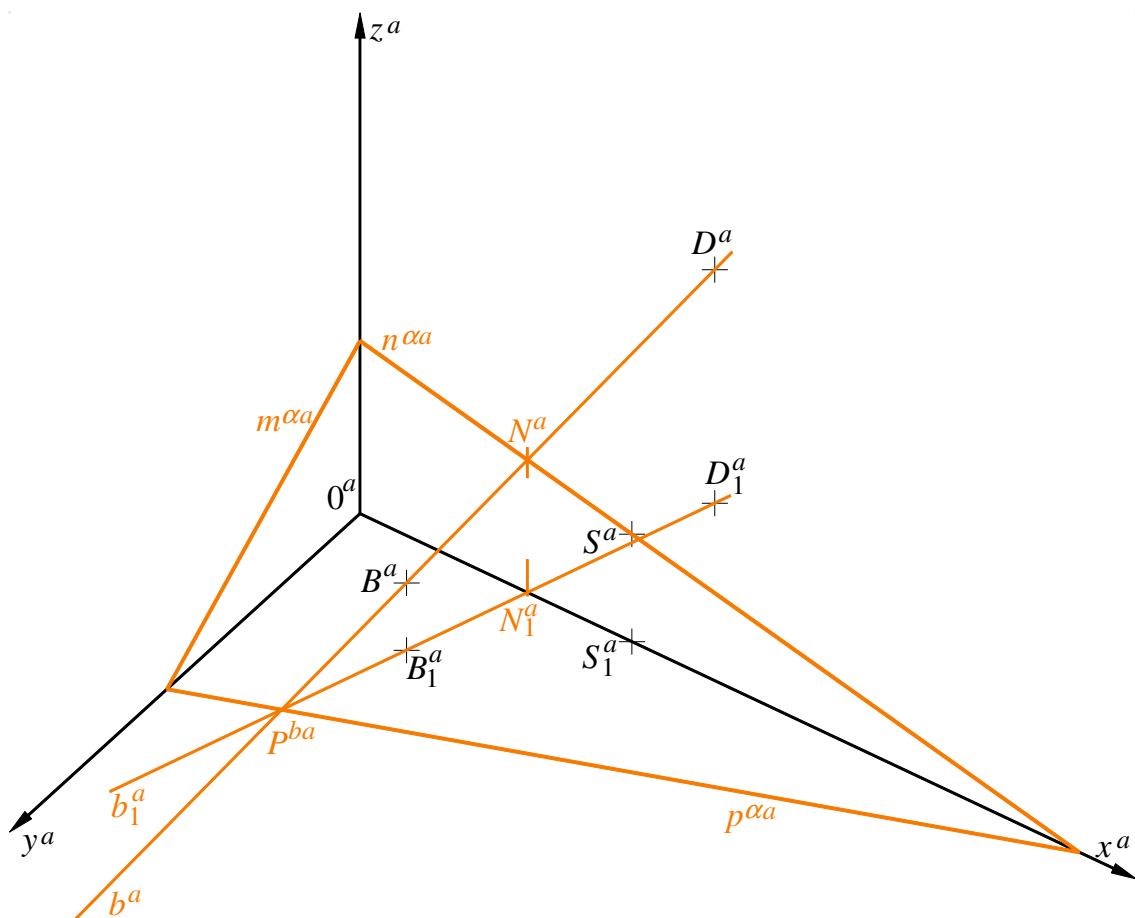
Vzdálenost bodu S od původní axonometrické průmětny nalezneme například jako vzdálenost bodu $\bar{Y}$ od původní axonometrické průmětny. Tuto vzdálenost zjistíme pomocí sklopení axonometricky promítací roviny osy y souřadnicového systému. Sklopená osa (y) je přitom určena body $Y = (Y)$, (0) a hledaná vzdálenost je rovna $|\bar{Y}(\bar{Y})|$.

23

24

Příklad 3. V pravoúhlé axonometrii sestrojte axonometrický průmět kváдру $ABCDEFGH$, jehož podstava $ABCD$ je čtverec a jehož tělesové úhlopříčky se protínají v bodě S .



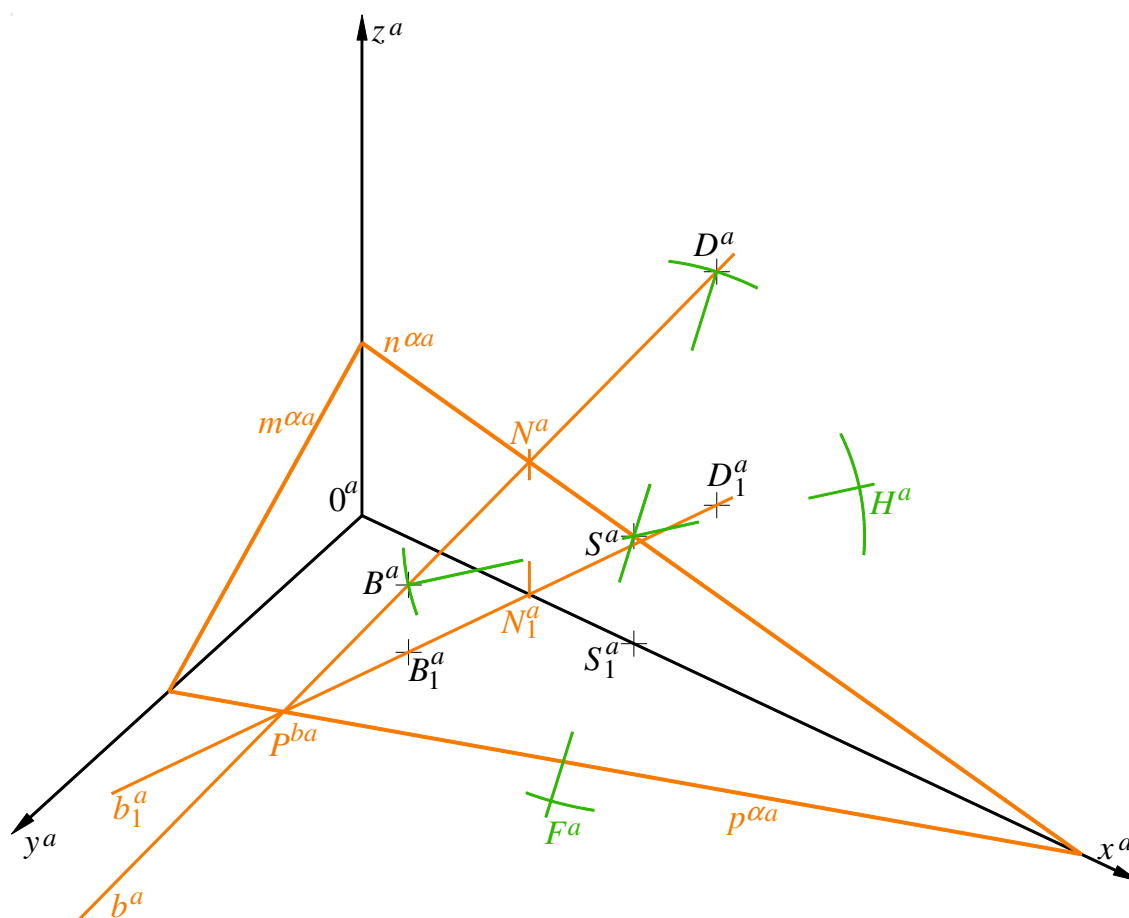


Sestrojíme stopy roviny α , v níž leží body S , B , D , a tedy i body H a F . Bod S leží v nárysně $\nu = (x, z)$, proto axonometrický průmět $n^{\alpha a}$ nárysné stopy n^α roviny α prochází axonometrickým průmětem S^a bodu S . Dále sestrojíme axonometrický průmět $b^a = B^a D^a$ a axonometrický půdorys $B_1^a D_1^a$ přímky $b = BD$ roviny α a sestrojíme axonometrický průmět, resp. axonometrický půdorys $P^{ba} = P_1^{ba}$ jejího půdorysného stopníku P^b a také axonometrický půdorys N_1^a a následně axonometrický průmět N^a jejího nárysného stopníku N .

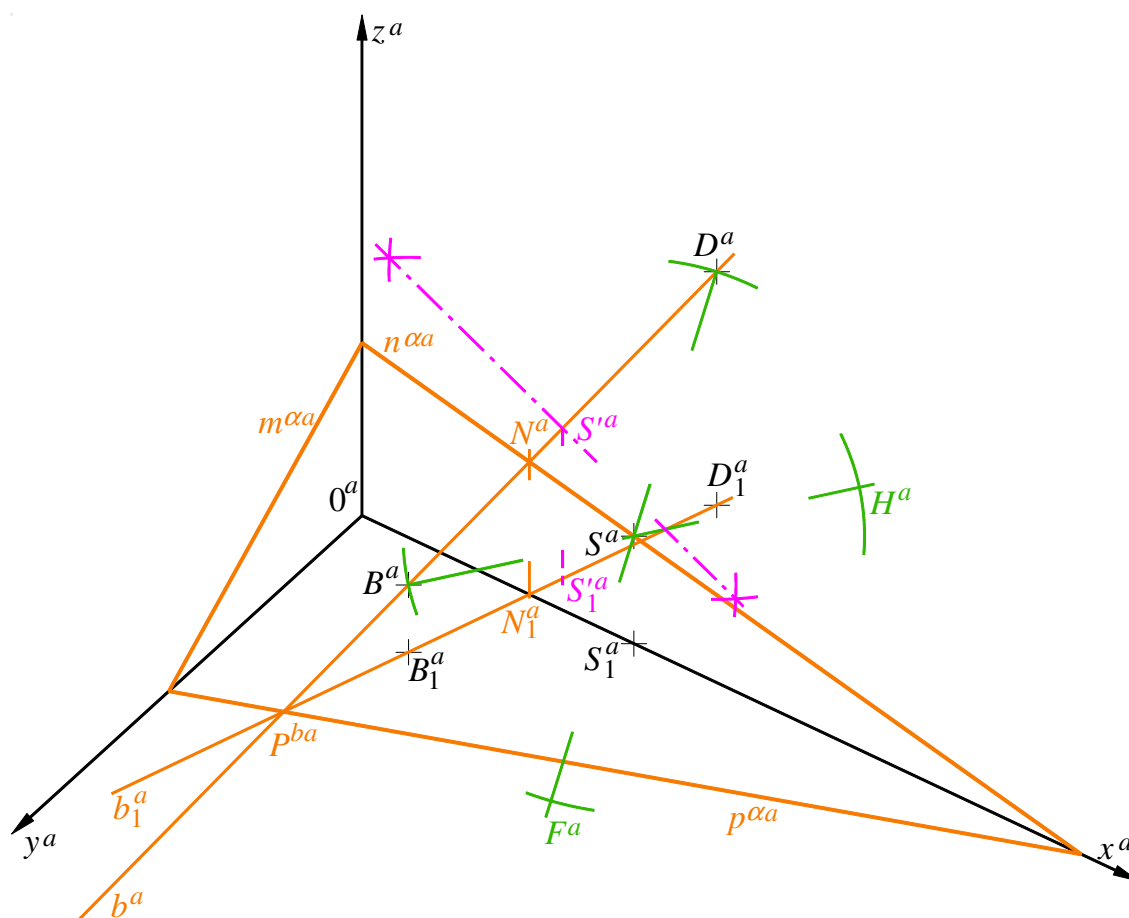
Axonometrický průmět $n^{\alpha a}$ nárysné stopy n^α roviny α je spojnicí axonometrického průmětu N^a bodu N a axonometrického průmětu S^a bodu S .

Axonometrický průmět $p^{\alpha a}$ půdorysné stopy p^α roviny α je spojnicí axonometrického průmětu P^{ba} bodu P^b a axonometrického průmětu průsečíku osy x s nárysnou stopou n^α roviny α .

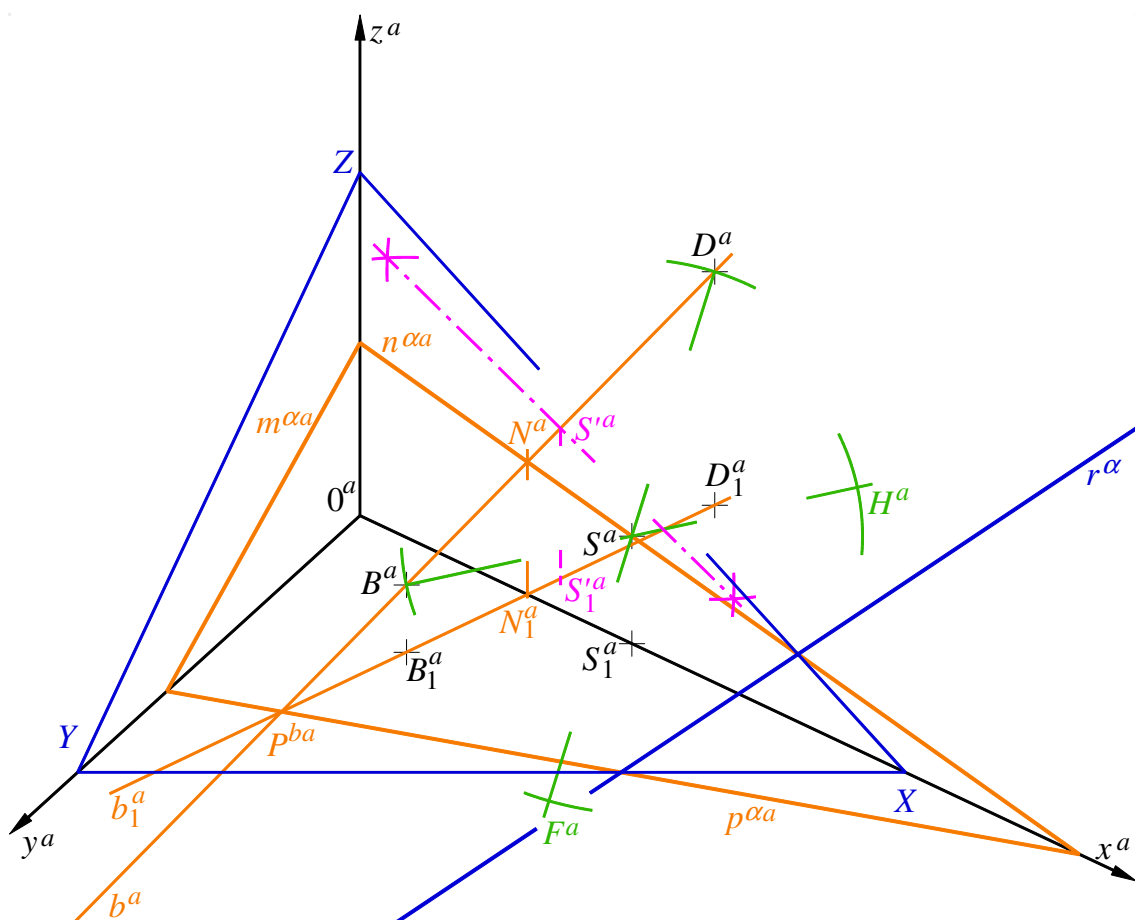
Axonometrický průmět $m^{\alpha a}$ bokorysné stopy m^α roviny α je spojnicí axonometrického průmětu průsečíku osy y s půdorysnou stopou p^α roviny α a axonometrického průmětu průsečíku osy z s nárysnou stopou n^α roviny α .



Nalezneme axonometrické průměty F^a , H^a vrcholů krychle F , H , tj. vrcholů ležících na tělesových úhlopříčkách krychle procházejících po řadě vrcholy D , B . Bod F^a je obrazem bodu D^a ve středové souměrnosti se středem S^a , bod H^a je v téže souměrnosti obrazem bodu B^a .

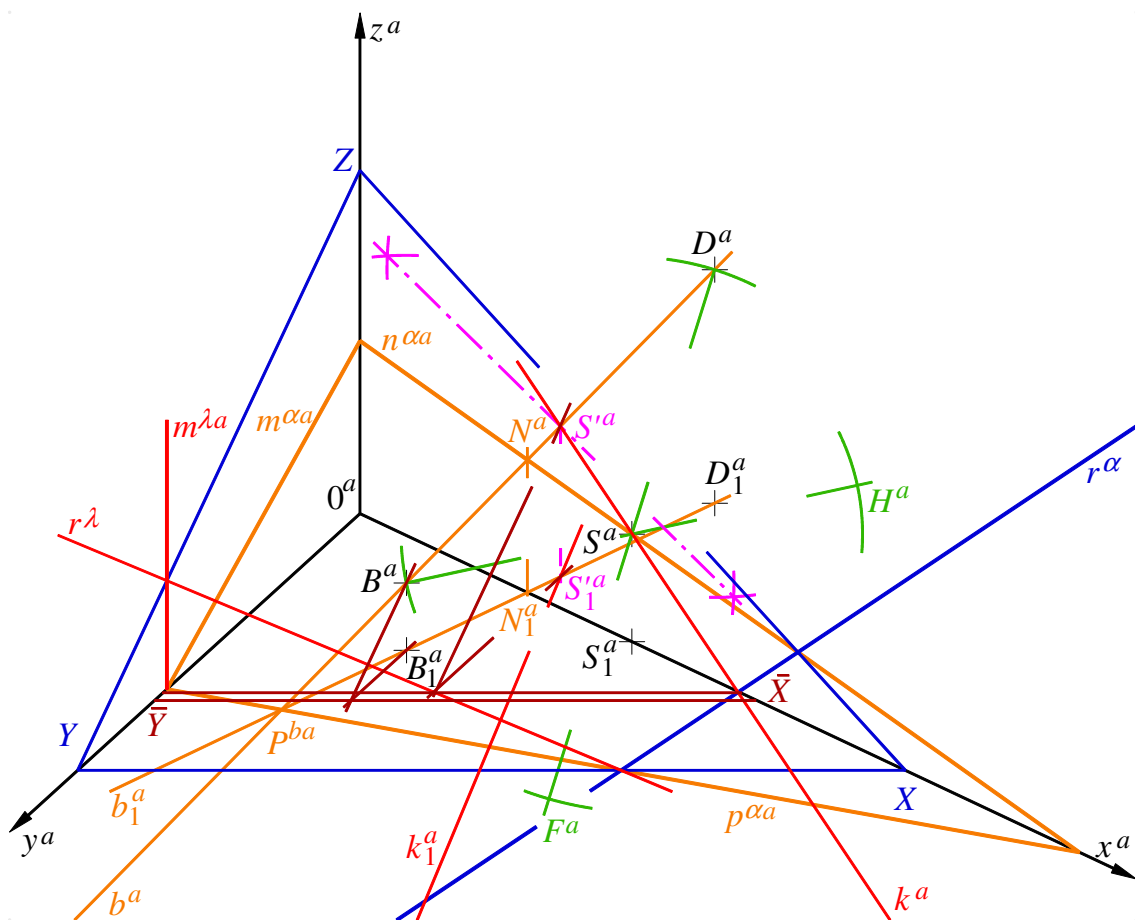


Vrcholy A , C kváдру leží na přímce, která prochází středem úsečky BC a je kolmá na rovinu α . Kolmici označme k (viz dále), střed úsečky BD označme S' . Nalezneme axonometrický průmět S'^a bodu S' jakožto střed úsečky B^aD^a a následně jeho axonometrický půdorys S_1^a .

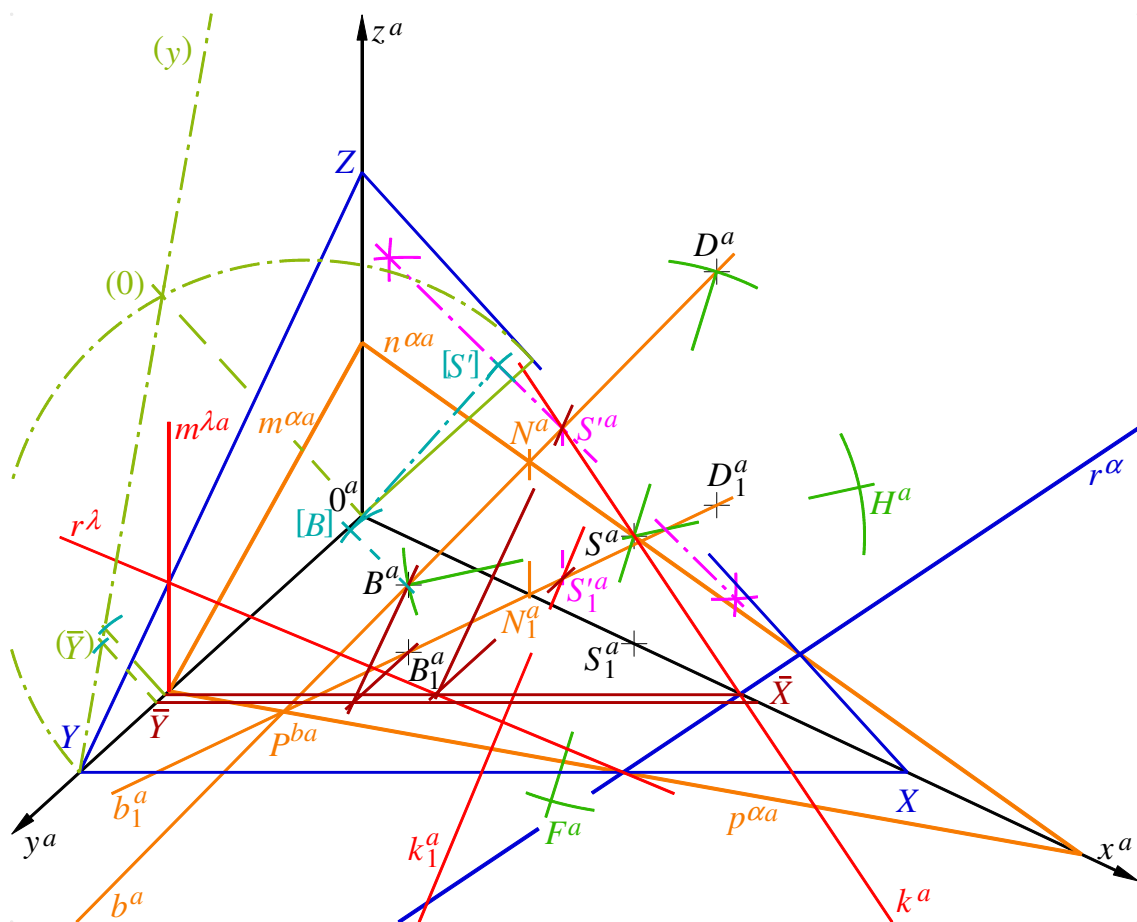


K sestrojení kolmice k potřebujeme znát axonometrickou stopu r^α roviny α . Pomocí axonometrického trojúhelníku XYZ proto zvolme axonometrickou průmětnu a sestrojme tuto axonometrickou stopu $r^\alpha = r^{\alpha a}$.



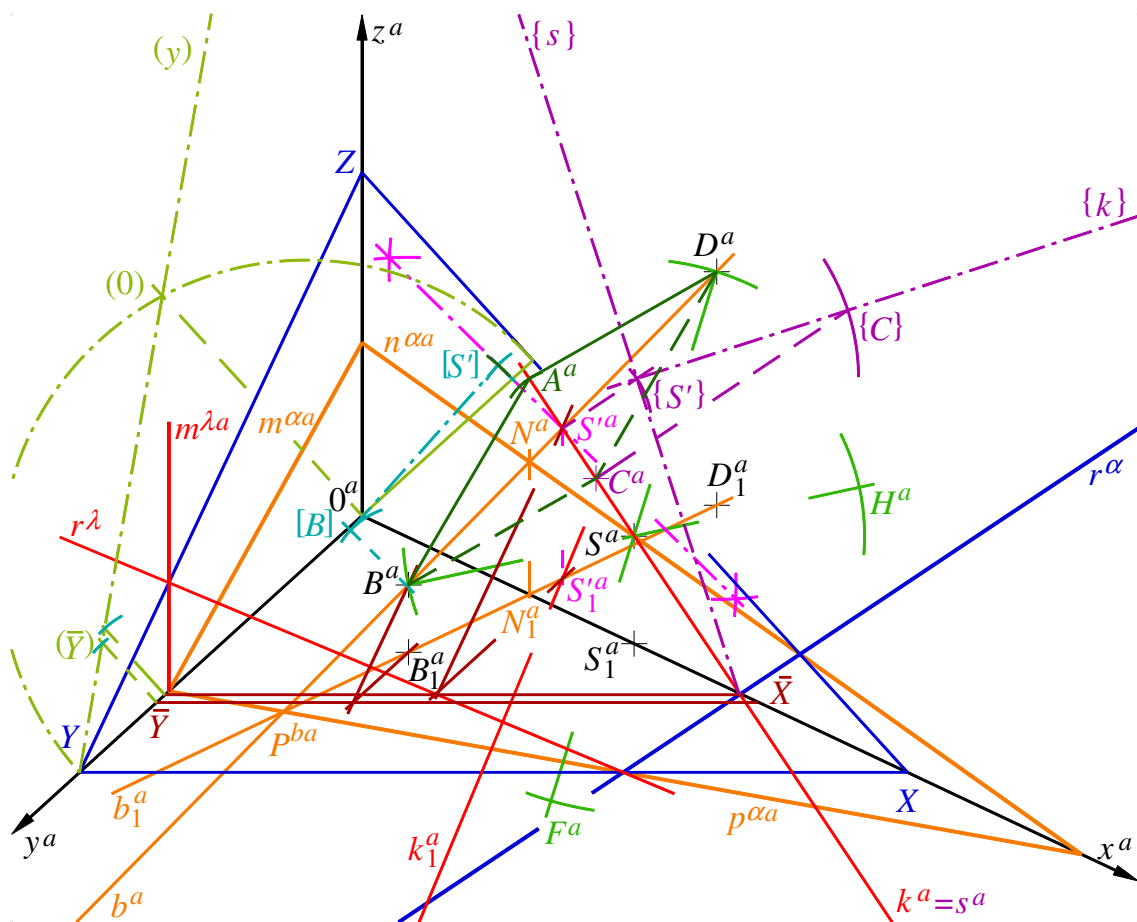


Vrcholy A, C krychle leží na kolmici k ve vzdálenosti $|BS'|$ od bodu S' . Zjistíme proto tuto velikost $|BS'|$ úsečky BS' , a to pomocí sklápění axonometricky promítací roviny přímky $b = BS' = BD$ (viz dále). K tomu potřebujeme znát vzdálenosti dvou bodů (například B, S') této přímky. Body B, S' proto vedeme nové axonometrické průmětny. Přesněji řečeno stačí sestavit jedinou stranu každého z příslušných axonometrických trojúhelníků. Pro axonometrickou průmětnu procházející bodem B je tato strana označena $\bar{X}\bar{Y}$ (pro axonometrickou průmětnu procházející bodem S' tato strana z prostorových důvodů označena není; i tentokrát však budeme pracovat se stranou axonometrického trojúhelníku, která leží v půdorysně).

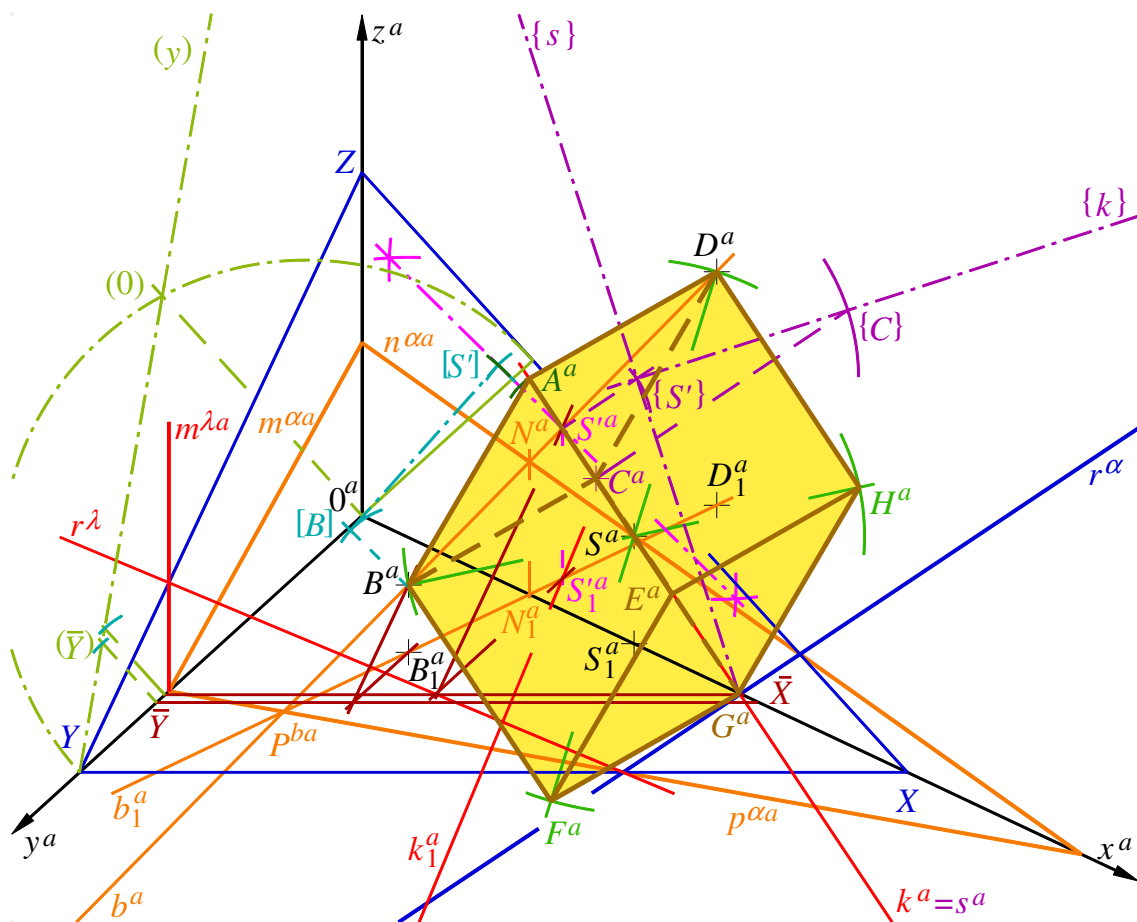


Sklopíme axonometricky promítací rovinu přímky b . Sestrojíme sklopené body $[B]$ a $[S']$, čímž zjistíme skutečnou délku $|BS'| = |[B][S']|$ poloviny úhlopříčky podstavy kváдру.





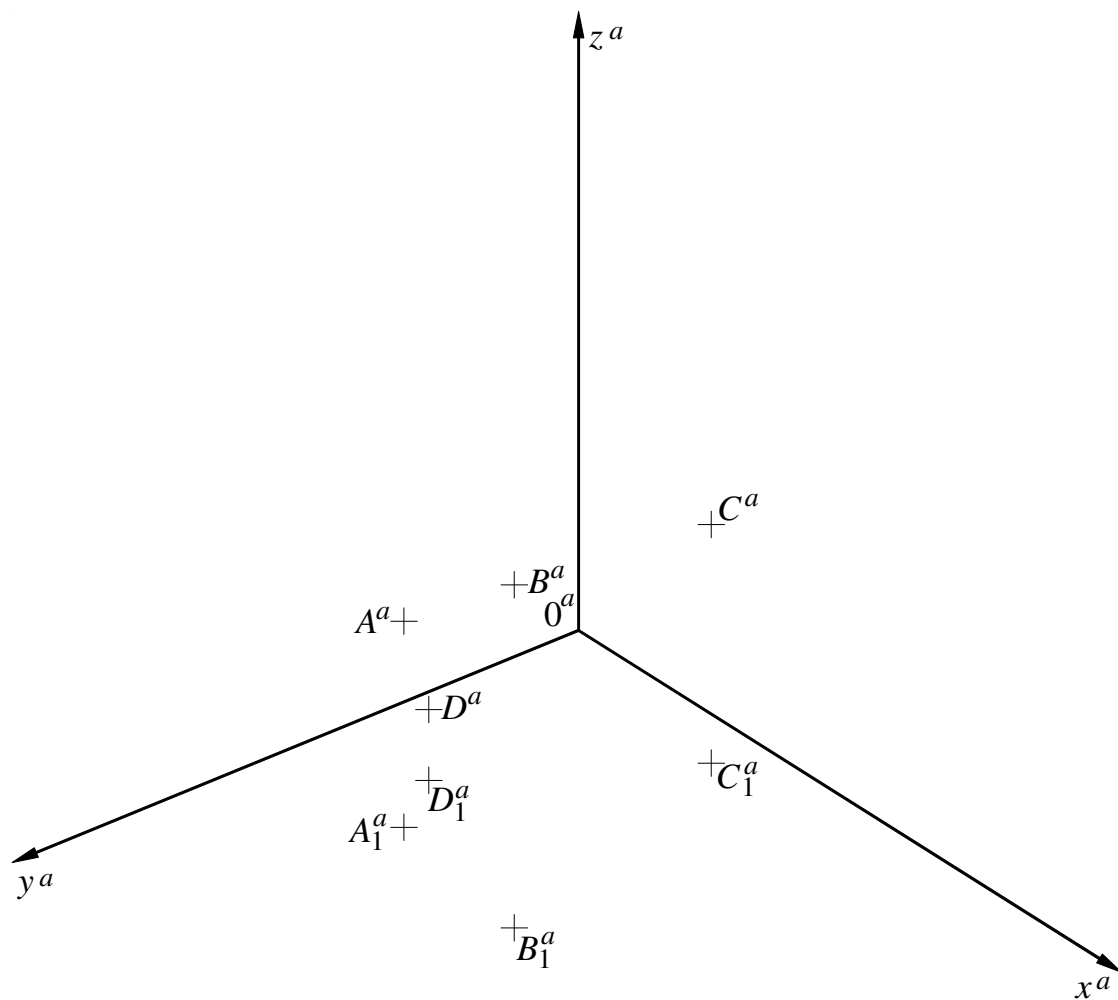
Sestrojíme axonometrický průmět A^a zbývajících vrcholů A podstavy $ABCD$ kváдру. Axonometrickým průmětem této podstavy je rovnoběžník $A^a B^a C^a D^a$.

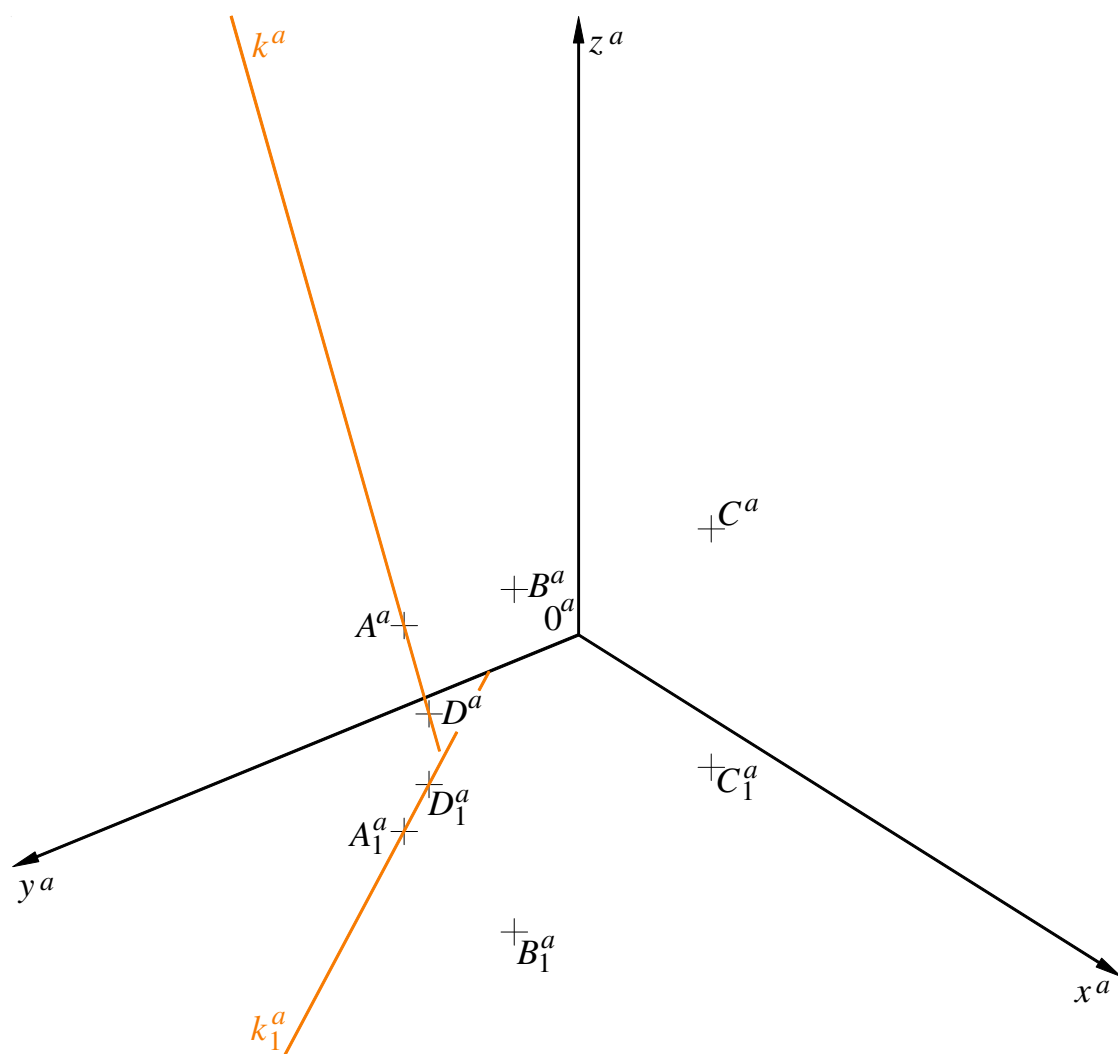


Zobrazíme-li rovnoběžník $A^a B^a C^a D^a$ v translaci s vektorem posunutí $D^a H^a$, získáme axonometrický průmět $E^a F^a G^a H^a$ druhé podstavy tělesa.

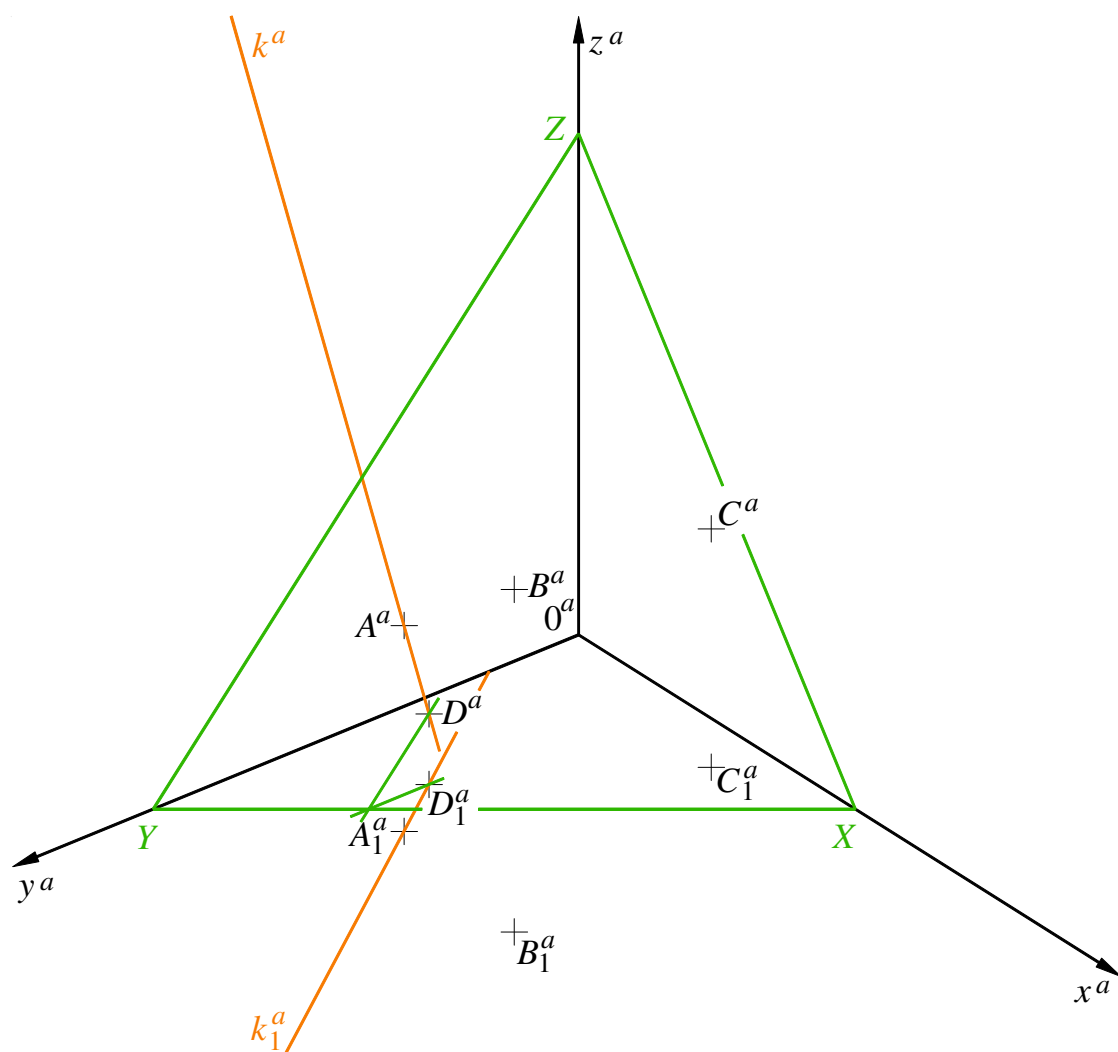
Nakonec sestojíme axonometrické průměty bočních hran kvádru a vyznačíme viditelnost jednotlivých hran tělesa. Tím je axonometrický průmět $A^a B^a C^a D^a E^a F^a G^a H^a$ kvádru $ABCDEFGH$ sestojen.

Příklad 4. Sestrojte axonometrický průmět rovnostranného válce, na jehož plášti leží body A, B, C , přičemž pravoúhlým průmětem bodu A do roviny dolní podstavy válce je bod D .

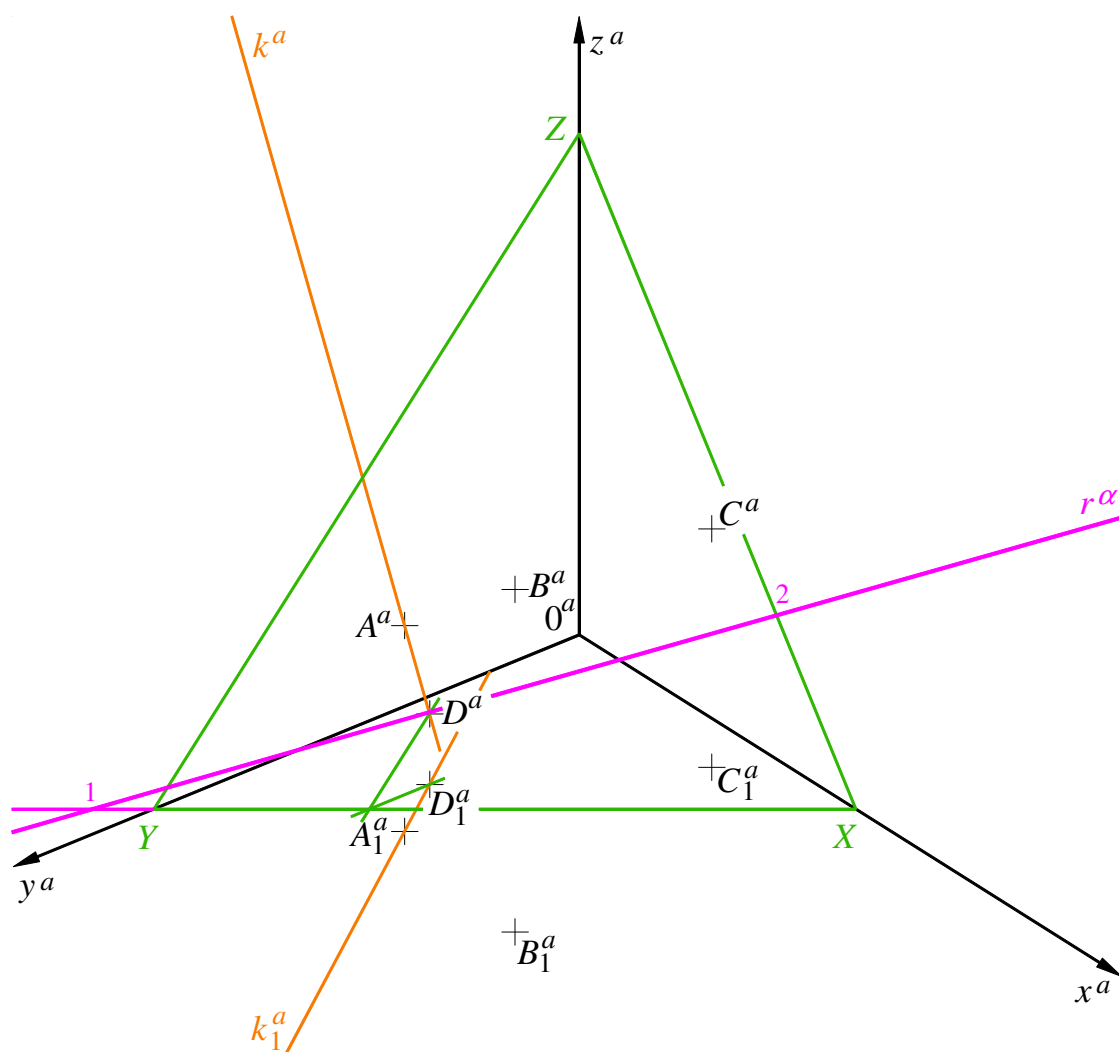




Jelikož je bod D ortogonální projekcí bodu A do roviny dolní podstavy válce, určuje přímka $k = AD$ směr osy válce. Sestrojíme proto axonometrický průmět $k^a = A^a D^a$ a axonometrický půdorys $k_1^a = A_1^a D_1^a$ přímky k .

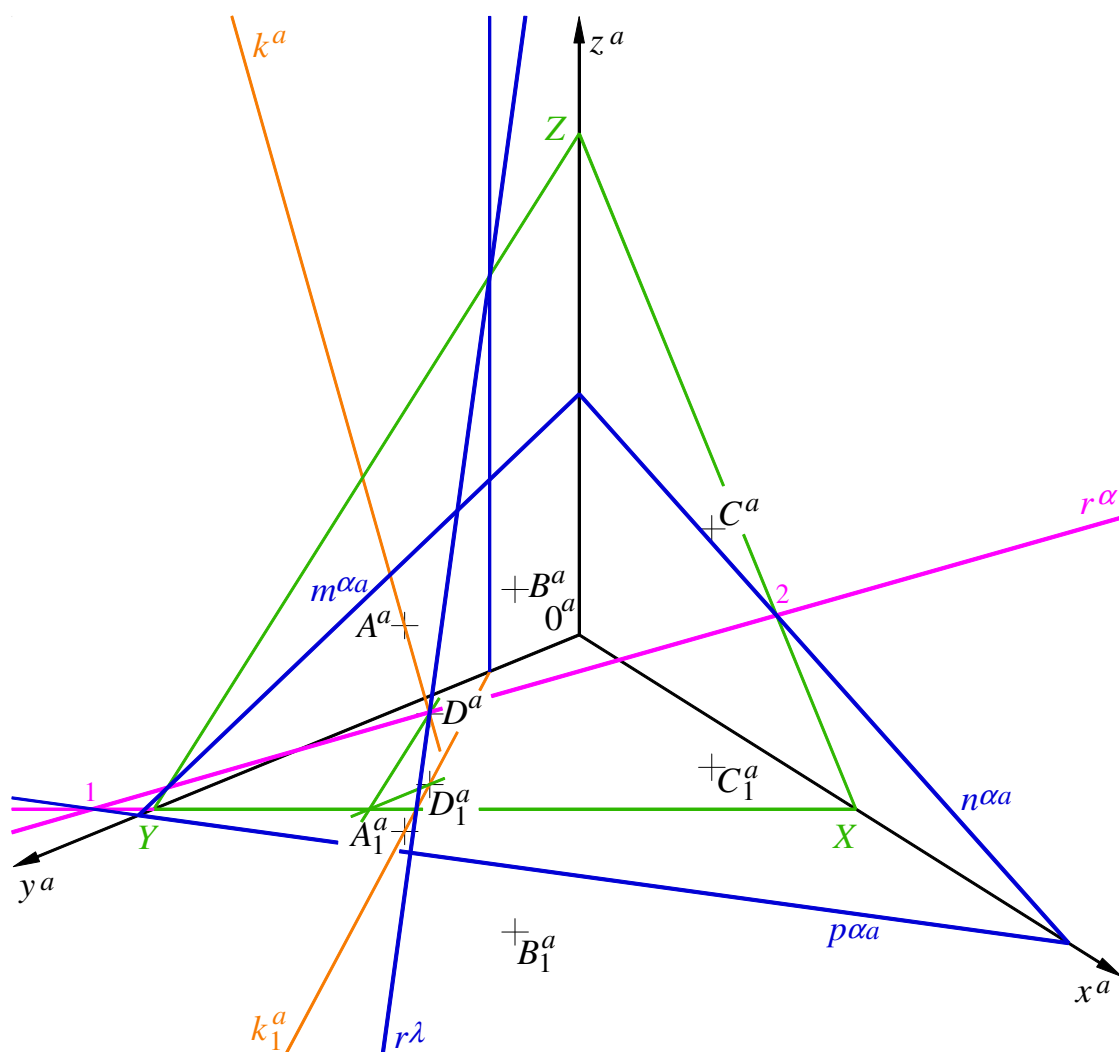


Rovina dolní podstavy je kolmá na přímkou k a prochází bodem D . Abychom našli tuto rovinu, kterou nazveme α , sestojíme nejprve axonometrickou průmětnu procházející bodem D . Využijeme k tomu například hlavní přímkou třetí osy axonometrické průmětny; přesněji řečeno její půdorysný stopník. Axonometrickou průmětnu určíme axonometrickým trojúhelníkem XYZ .



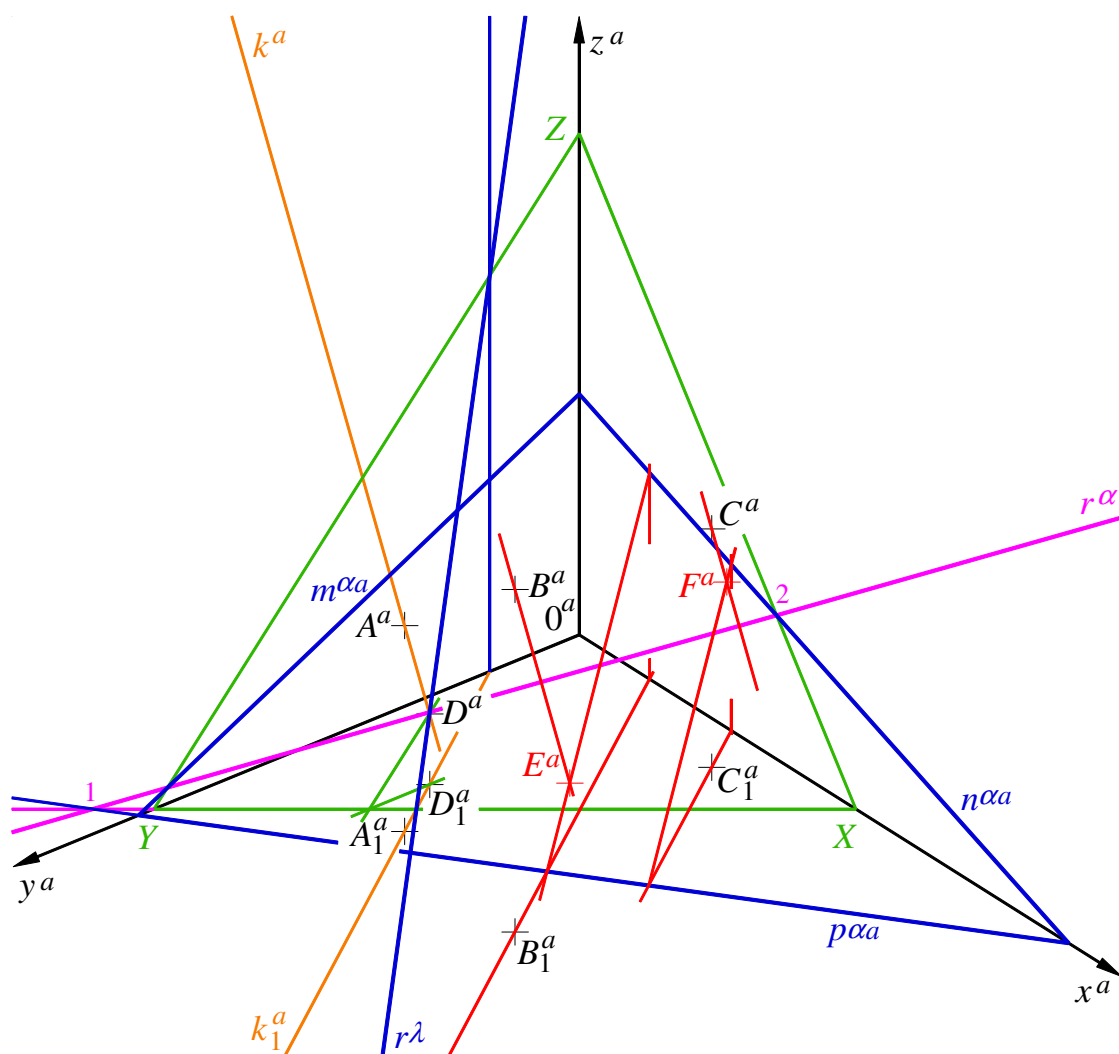
Jelikož jsme axonometrickou průmětnu vedli bodem D , prochází axonometrická stopa $r^\alpha = r^{\alpha a}$ roviny α axonometrickým průmětem D^a bodu D . Protože jsou splněny předpoklady věty o pravoúhlém průmětu kolmých přímek, je axonometrická stopa $r^\alpha = r^{\alpha a}$ roviny α kolmá na axonometrický průmět k^a přímky k .

Průsečík axonometrické stopy r^α roviny α s půdorysnou stopou XY , resp. s nárysnou stopou XZ axonometrické průmětny označme 1, resp. 2. Bodem 1 prochází axonometrický průmět $p^{\alpha a}$ půdorysné stopy p^α hledané roviny α , zatímco bodem 2 prochází axonometrický průmět $n^{\alpha a}$ nárysné stopy n^α této roviny (viz dále).



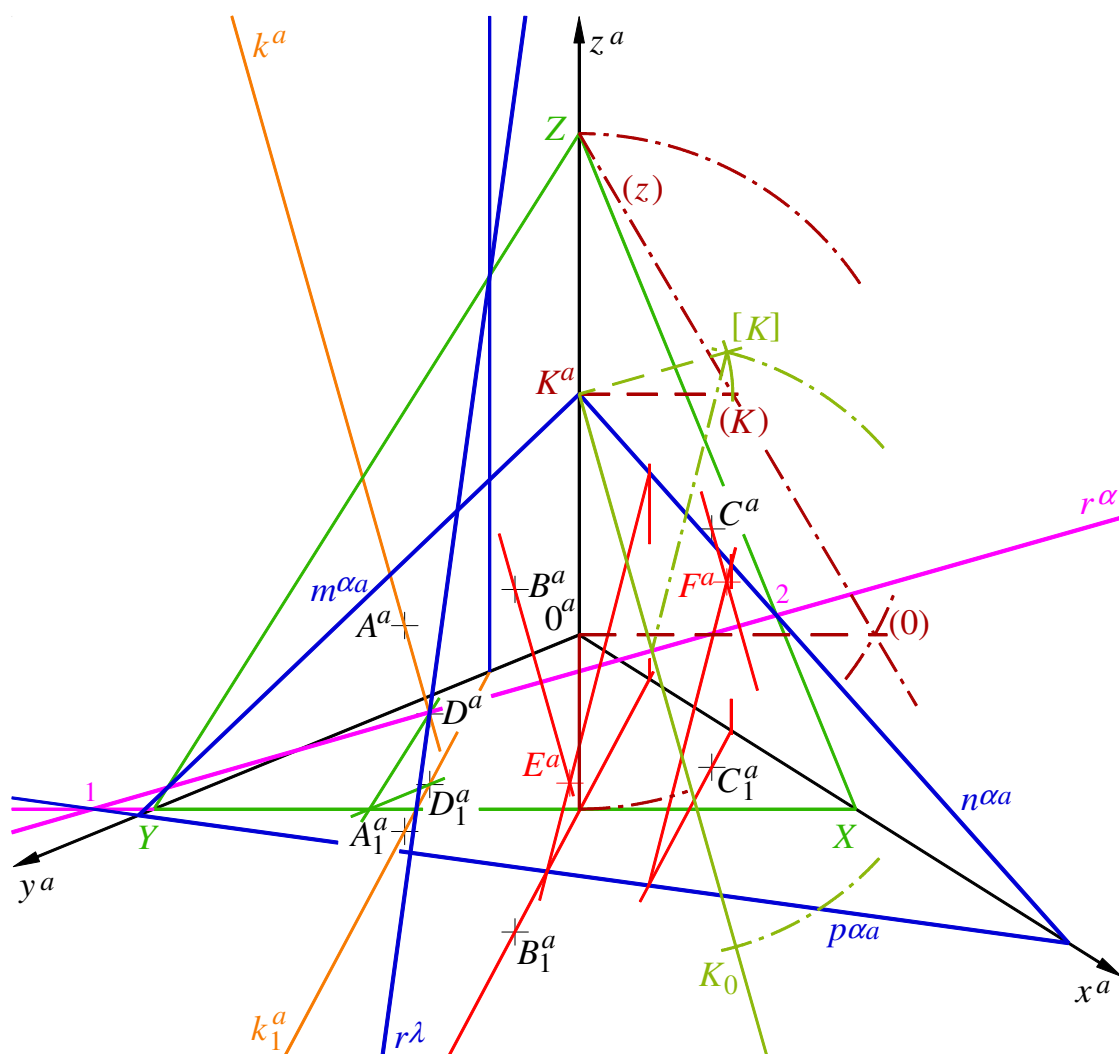
Některým ze známých způsobů nalezneme axonometrický průmět směru přímek, které leží v půdorysně a jsou kolmé na přímkou, která také leží v půdorysně a jejíž axonometrický průmět i axonometrický půdorys splývají s přímkou k_1^a . Tento směr je směrem axonometrického průmětu $p^{\alpha a}$ půdorysné stopy p^α roviny α . Na obrázku je využito skutečnosti, že tento směr je kolmý na axonometrickou stopu $r^\lambda = r^{\lambda a}$ roviny λ , která je kolmá na půdorysnu a obsahuje přímkou k .

Sestrojíme tedy nejdříve axonometrickou stopu $r^\lambda = r^{\lambda a}$ roviny λ a následně bodem 1 vedeme axonometrický průmět $p^{\alpha a}$ půdorysné stopy p^α roviny α , a to kolmo na přímkou r^λ . Spojíme-li bod 2 a průsečík axonometrického průmětu $p^{\alpha a}$ půdorysné stopy p^α roviny α s axonometrickým průmětem x^a osy x souřadnicového systému, získáme axonometrický průmět $n^{\alpha a}$ nárysné stopy n^α roviny α . Nakonec narýsujeme axonometrický průmět $m^{\alpha a}$ bokorysné stopy m^α roviny α .

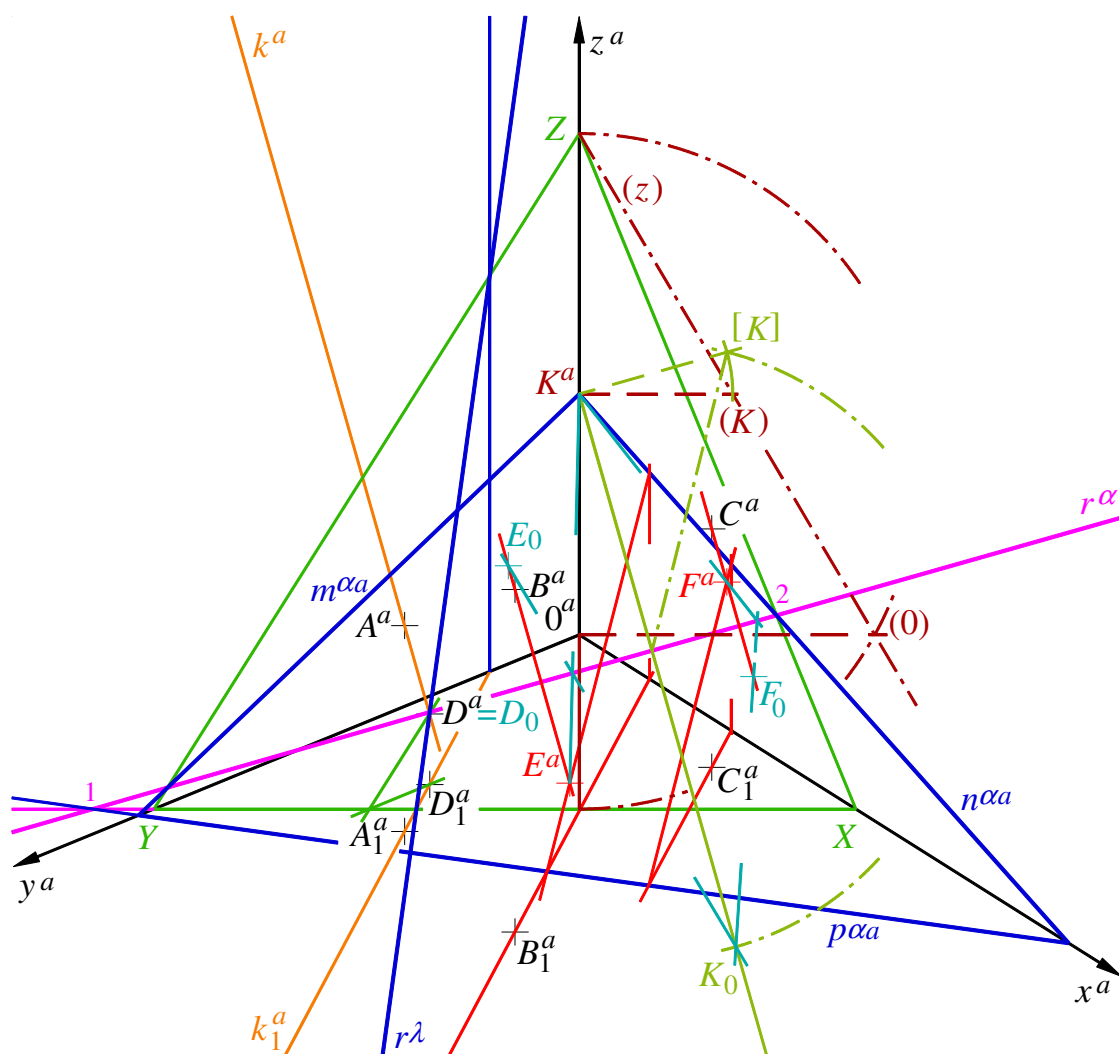


Body B a C vedeme přímky směru k . Tj. axonometrickým průmětem B^a bodu B vedeme přímku směru k^a a axonometrickým půdorysem B_1^a bodu B vedeme přímku směru k_1^a . Obdobně pracujeme s bodem C . Sestrojíme axonometrické průměty E^a, F^a průsečíků E, F těchto dvou přímek s rovinou α dolní podstavy (body D, E, F leží na hraniční kružnici dolní kruhové podstavy), a to například pomocí rovin kolmých na půdorysnu, které jednotlivými přímkami proložíme.

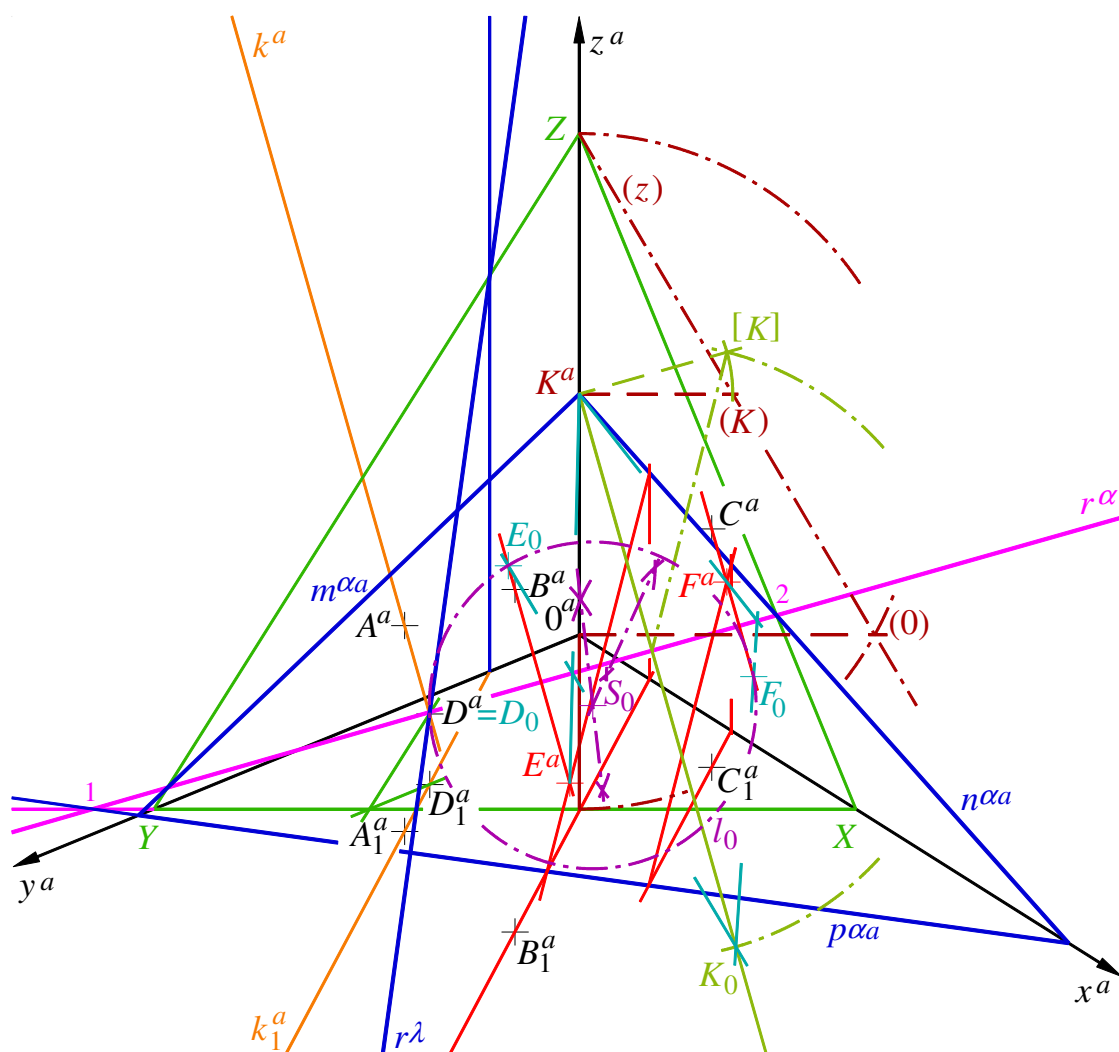




Nyní můžeme otočit bod K . Nejprve sklopíme axonometricky promítací rovinu přímky roviny α , která prochází bodem K a je kolmá na axonometrickou stopu r^α roviny α . Sestrojíme sklopený bod $[K]$, ve sklopení zjistíme poloměr otáčení a sestrojíme otočený bod K_0 .

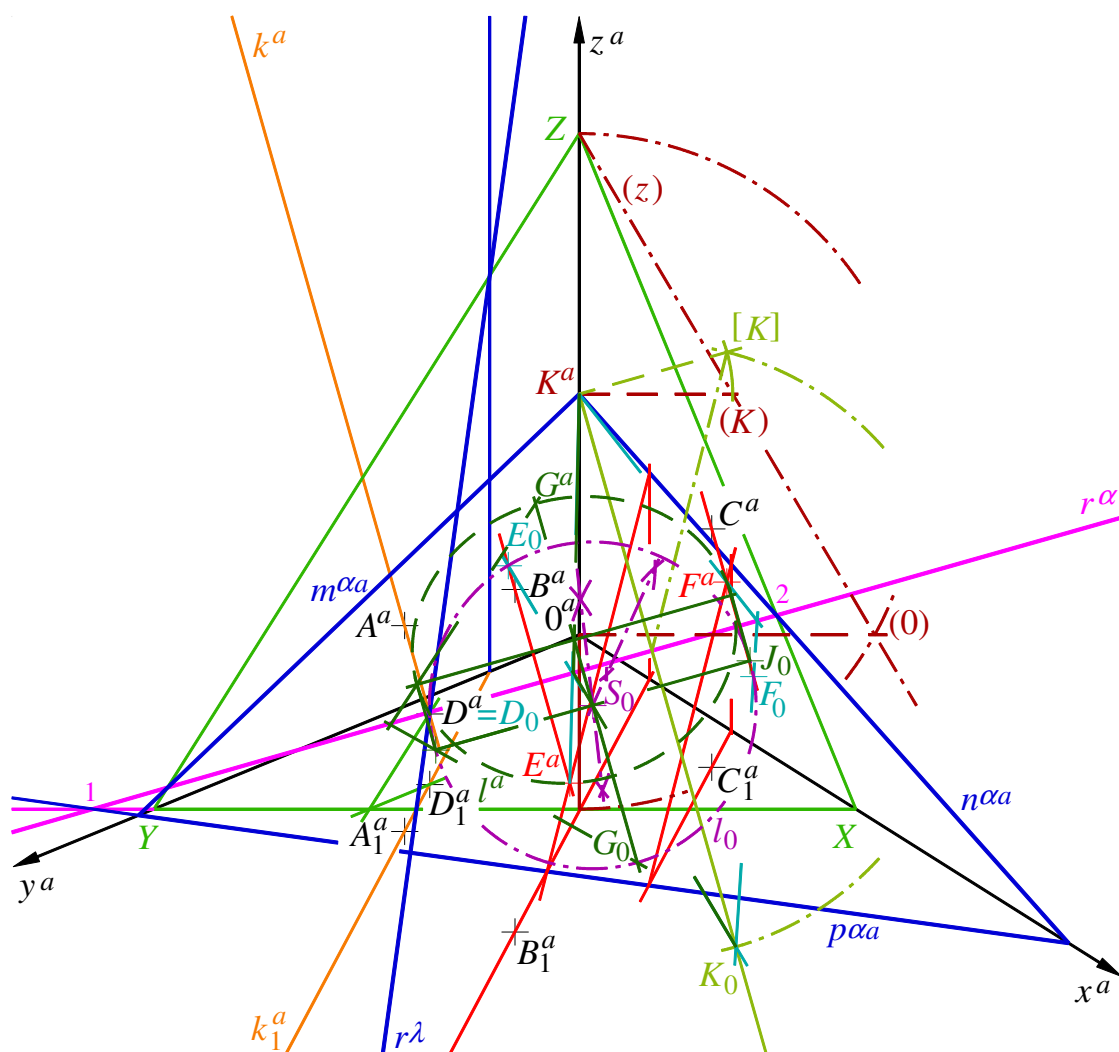


Pomocí pravoúhlé osové afinity v rovině, jejíž osou je axonometrická stopa r^α roviny α a v níž si odpovídají body K^a , K_0 , sestojíme obrazy D_0 , E_0 , F_0 bodů D^a , E^a , F^a .



Axonometrickým průmětem hraniční kružnice dolní kruhové podstavy válce, kterou budeme značit l , je elipsa, jejímž obrazem v uvedené osové afinitě je otočená kružnice l_0 .

Sestrojíme střed S_0 otočené kružnice l_0 procházející body D_0 , E_0 , F_0 , a to například jako průsečík os úseček D_0F_0 a E_0F_0 . Následně narýsujeme kružnici l_0 .



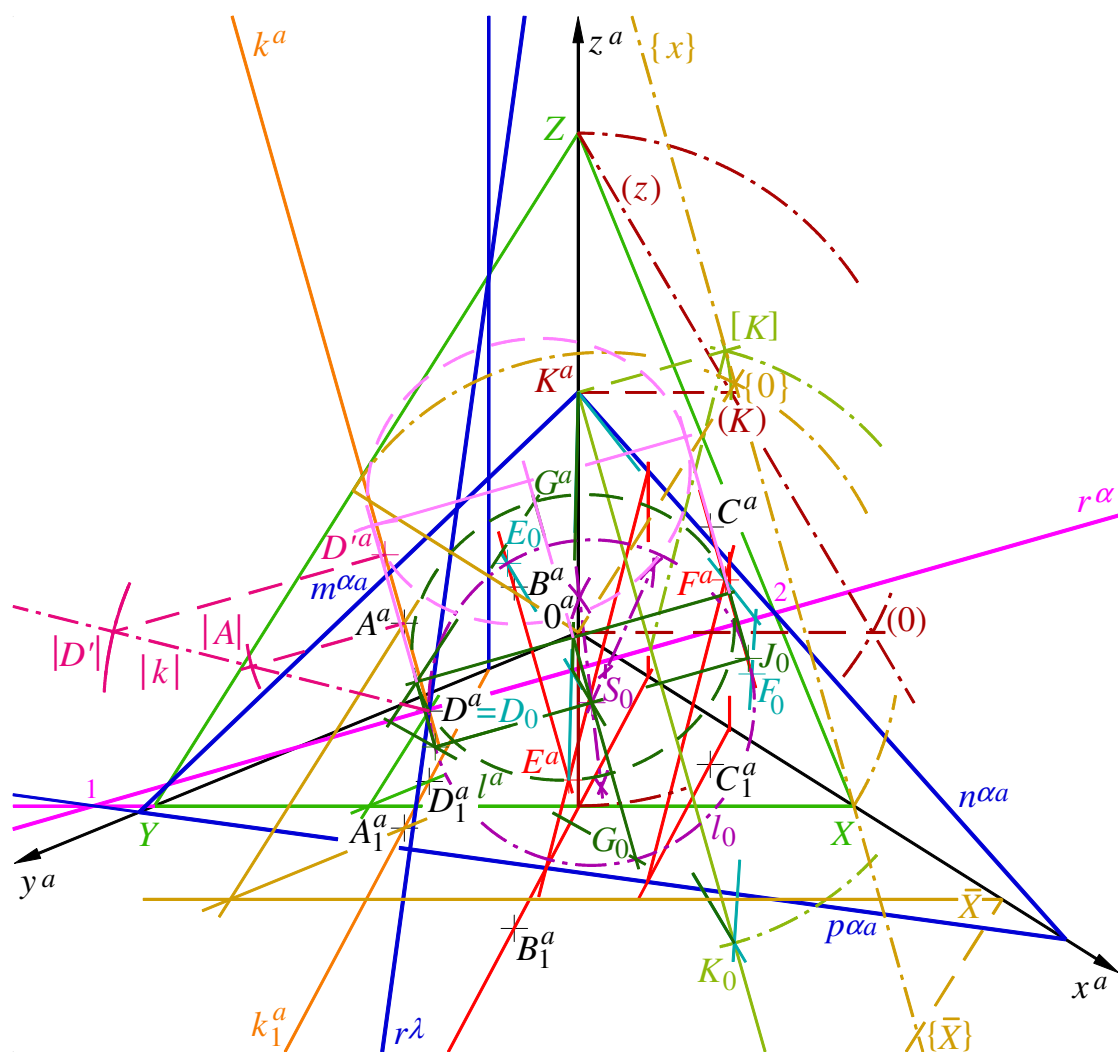
Sestrojíme vektor l^a kružnice l_0 v uvažované osové afinitě. Elipsa l^a má hlavní vrcholy, které v afinitě odpovídají krajním bodům průměru kružnice l_0 rovnoběžnému s osou afinity r^{α} (na obrázku je z prostorových důvodů popsán pouze jeden z nich, a to bod J_0).

Vedlejší vrchol G^a elipsy l^a sestrojíme jako bod odpovídající v uvažované afinitě krajnímu bodu G_0 průměru kružnice l_0 kolmému na osu afinity r^{α} (případně můžeme k jeho nalezení využít proužkovou rozdílovou konstrukci elipsy, neboť známe nejen hlavní vrcholy elipsy l^a , ale rovněž její obecné body D^a , E^a , F^a).

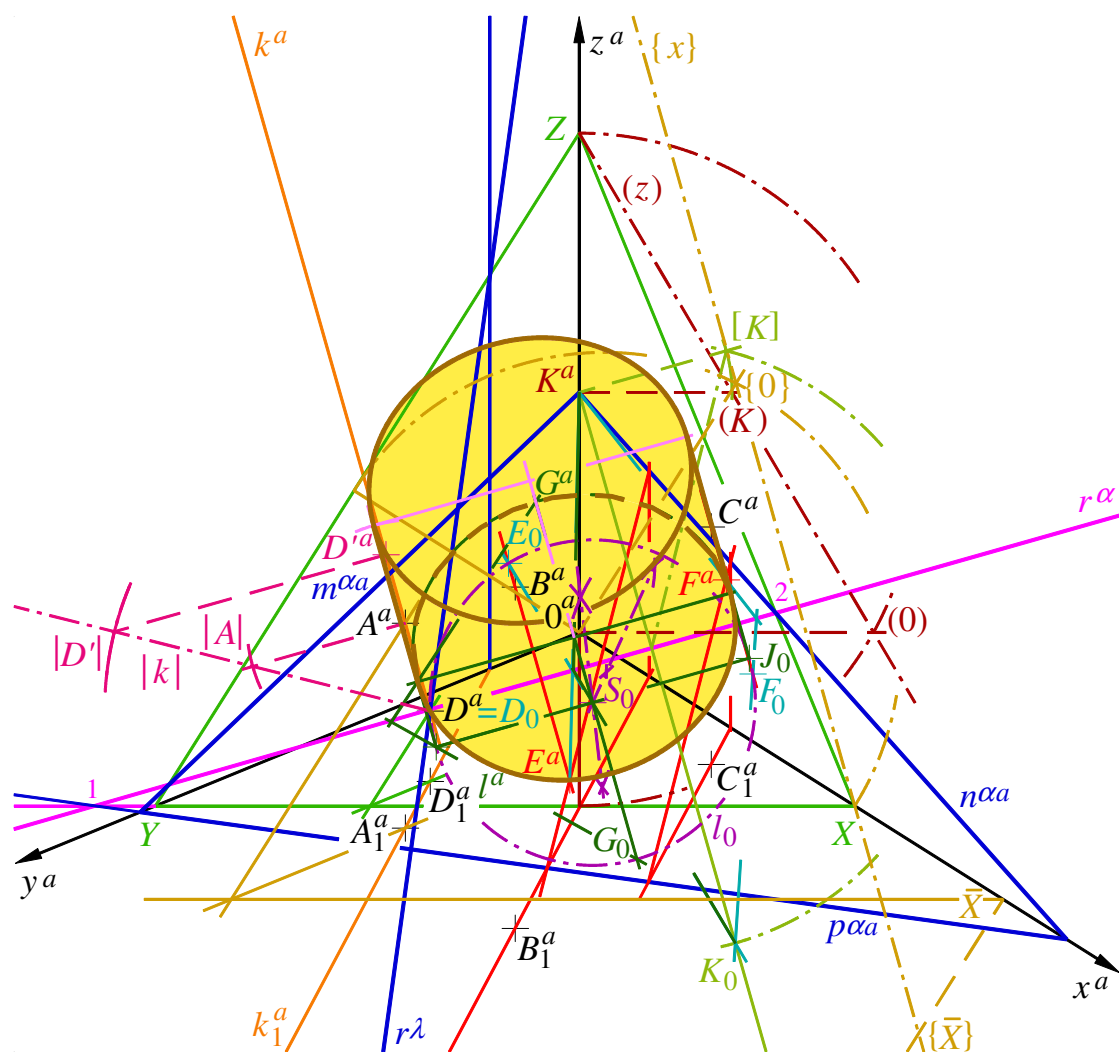
Hlavními vrcholy a jedním z vedlejších vrcholů je elipsa l^a jednoznačně určena.



49



Zobrazíme elipsu l^a v translaci, která je určena vektorem $D^a D'^a$, čímž získáme axonometrický průmět hraniční kružnice horní kruhové podstavy tělesa. Sestrojíme rovněž úsečky, které spojují hlavní vrcholy elips a jsou součástí zdánlivého obrysu tělesa.



Nakonec odlišíme části elips, které jsou při promítání vidět, od těch, které vidět nejsou. Tím je axonometrický průmět válce sestaven.