

ZOBRAZENÍ TĚLES
V KOSOÚHLÉM PROMÍTÁNÍ II

Martina Škorpilová

Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy

Praha

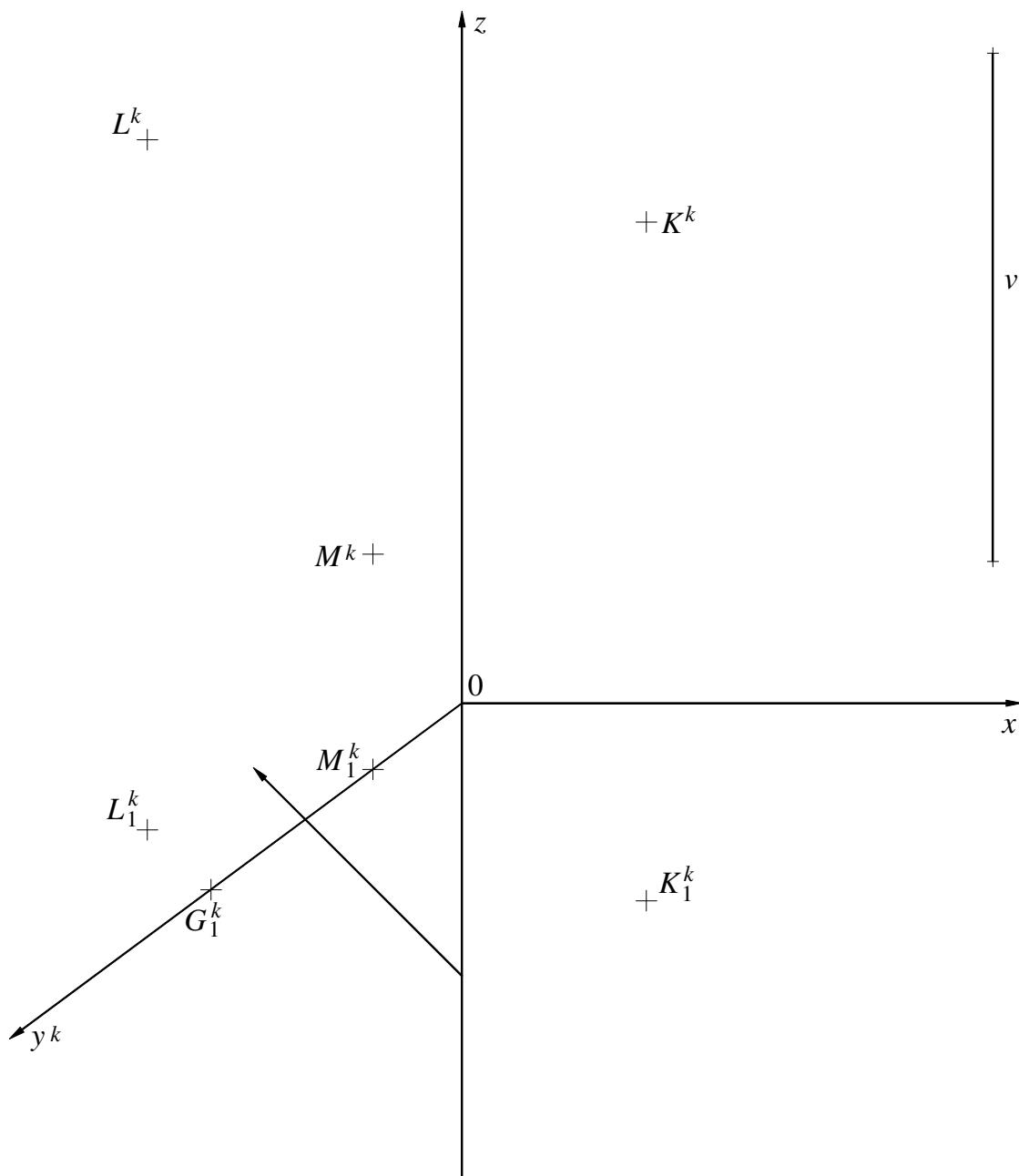
2025

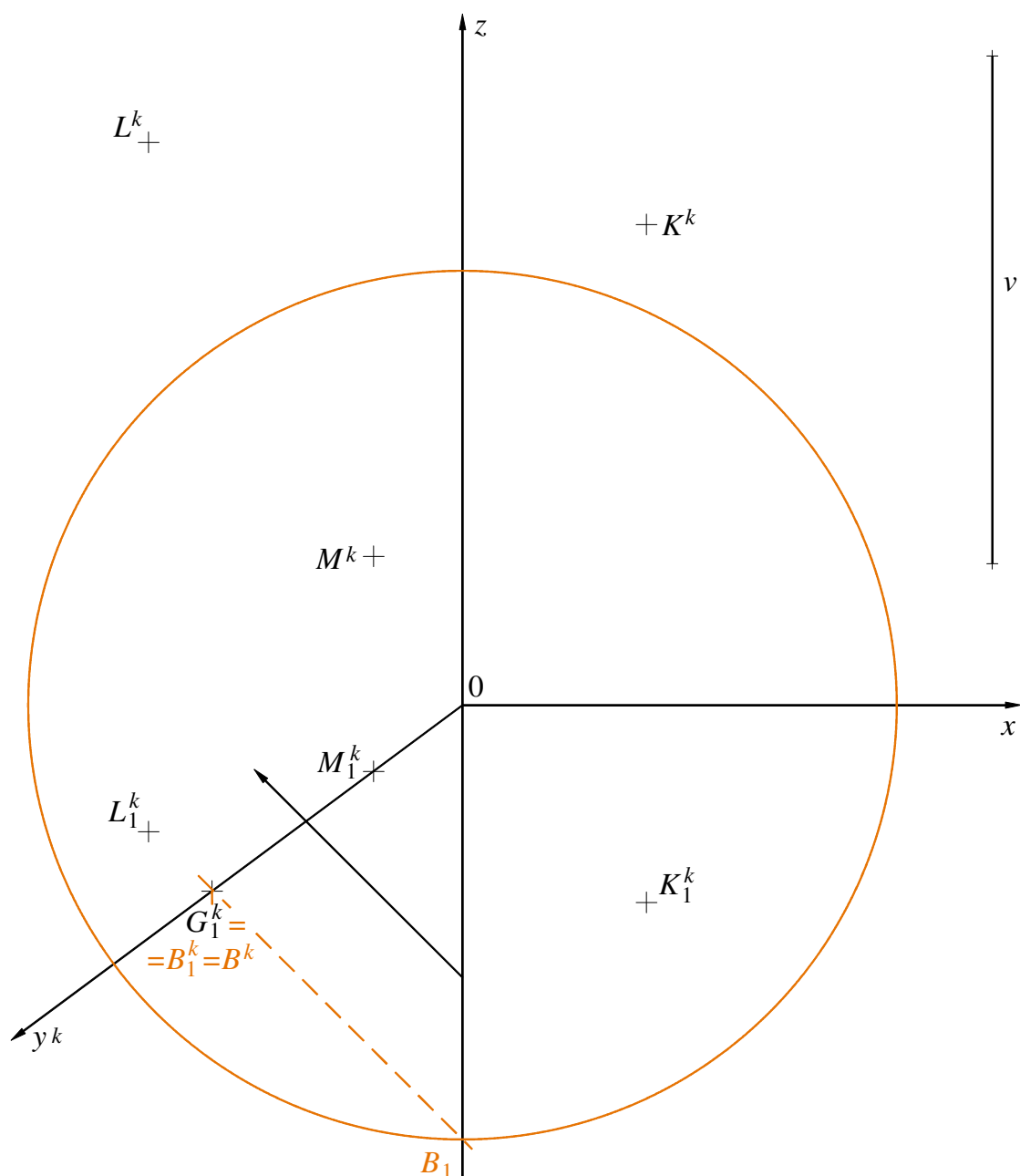
Studijní materiál *Zobrazení těles v kosoúhlém promítání II* je dalším dílem ze sady textů, které slouží k procvičení deskriptivní geometrie na komplexnějších příkladech.

Text úzce souvisí s materiálem *Zobrazení těles v pravoúhlé axonometrii*, neboť zadání prvních pěti příkladů v obou textech si více či méně odpovídají. Některá zadání jsou – co se úkolů a zadávajících útvarů týče – totožná, některá jsou mírně pozměněná nebo rozšířená o další podpříklad (v žádném příkladě však nejsou ponechány stejné polohy všech zadávajících útvarů). Čtenář, resp. řešitel tak může porovnat složitost některých kroků konstrukcí v obou promítáních, tj. v pravoúhlé axonometrii a v kosoúhlém promítání.

Tak jako u předchozích studijních materiálů platí, že je text určen pro studenty učitelství deskriptivní geometrie na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy a očekává se znalost učiva deskriptivní geometrie probraného v prvním ročníku bakalářského studia. Měl by sloužit jak při výuce, tak při domácím samostudiu. Úlohy jsou opět řešeny. Obrazová ztvárnění řešení jsou krokována a každá z ilustrací je slovně popsána.

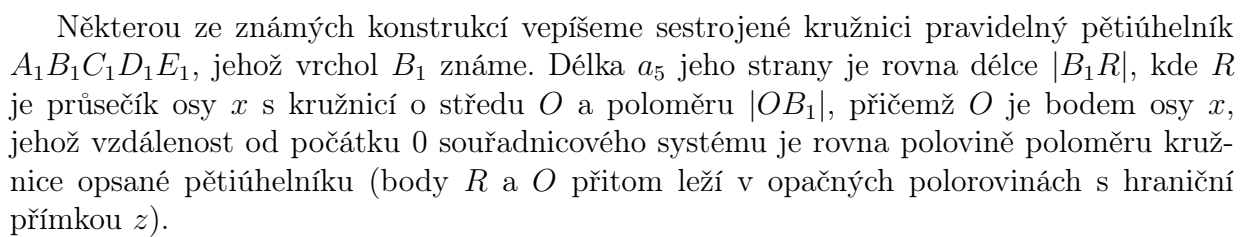
Příklad 1. Sestrojte kosoúhlý průmět pravidelného pětibokého hranolu $ABCDEFGHIJ$, jehož osa splývá s osou z souřadnicového systému, jehož dolní podstava $ABCDE$ leží v půdorysně a jehož výška je v . Sestrojte rovněž jeho řez rovinou $\alpha = KLM$ a poté zobrazte těleso, které vznikne z hranolu po odebrání uříznuté části obsahující vrchol G .

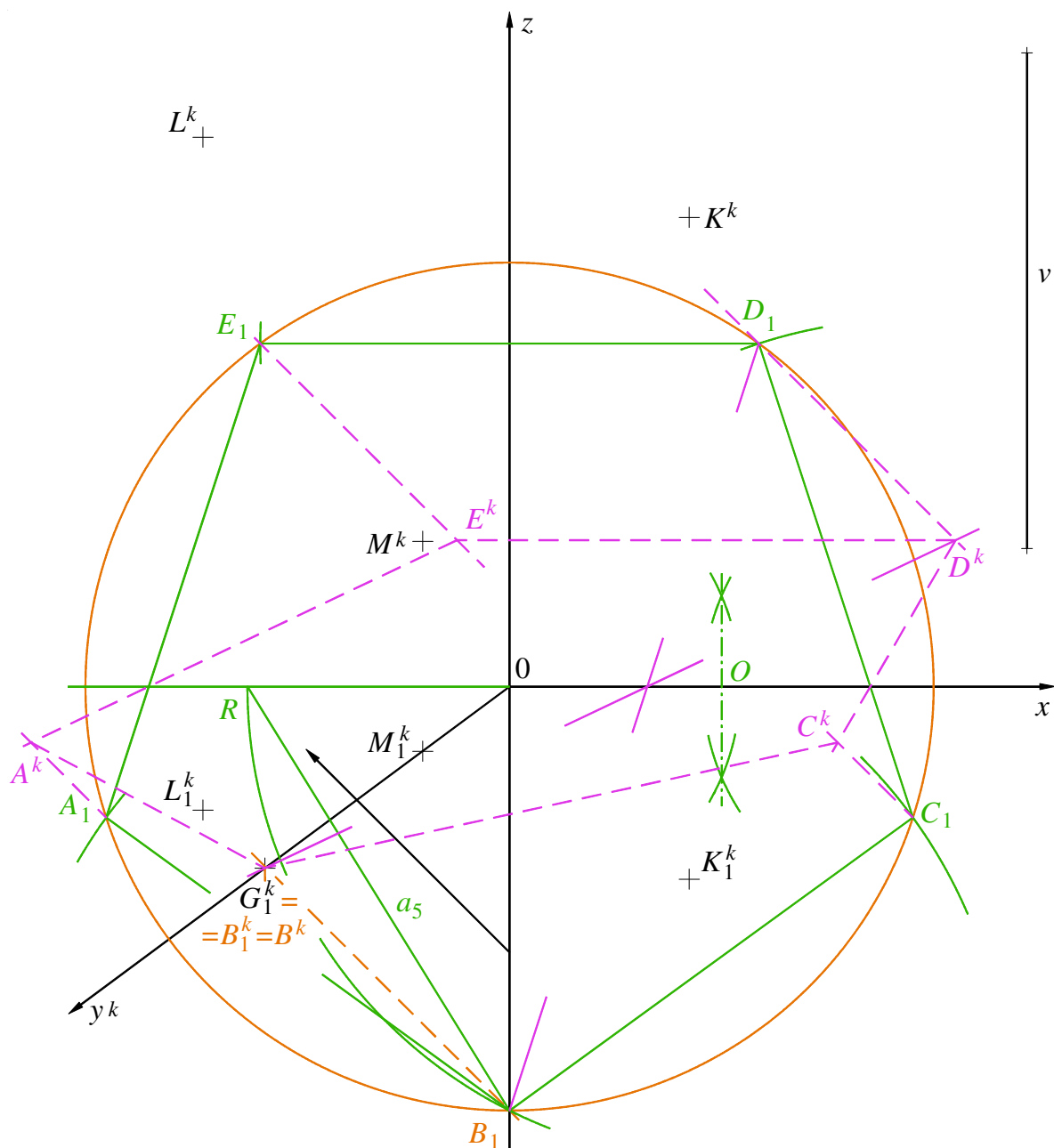




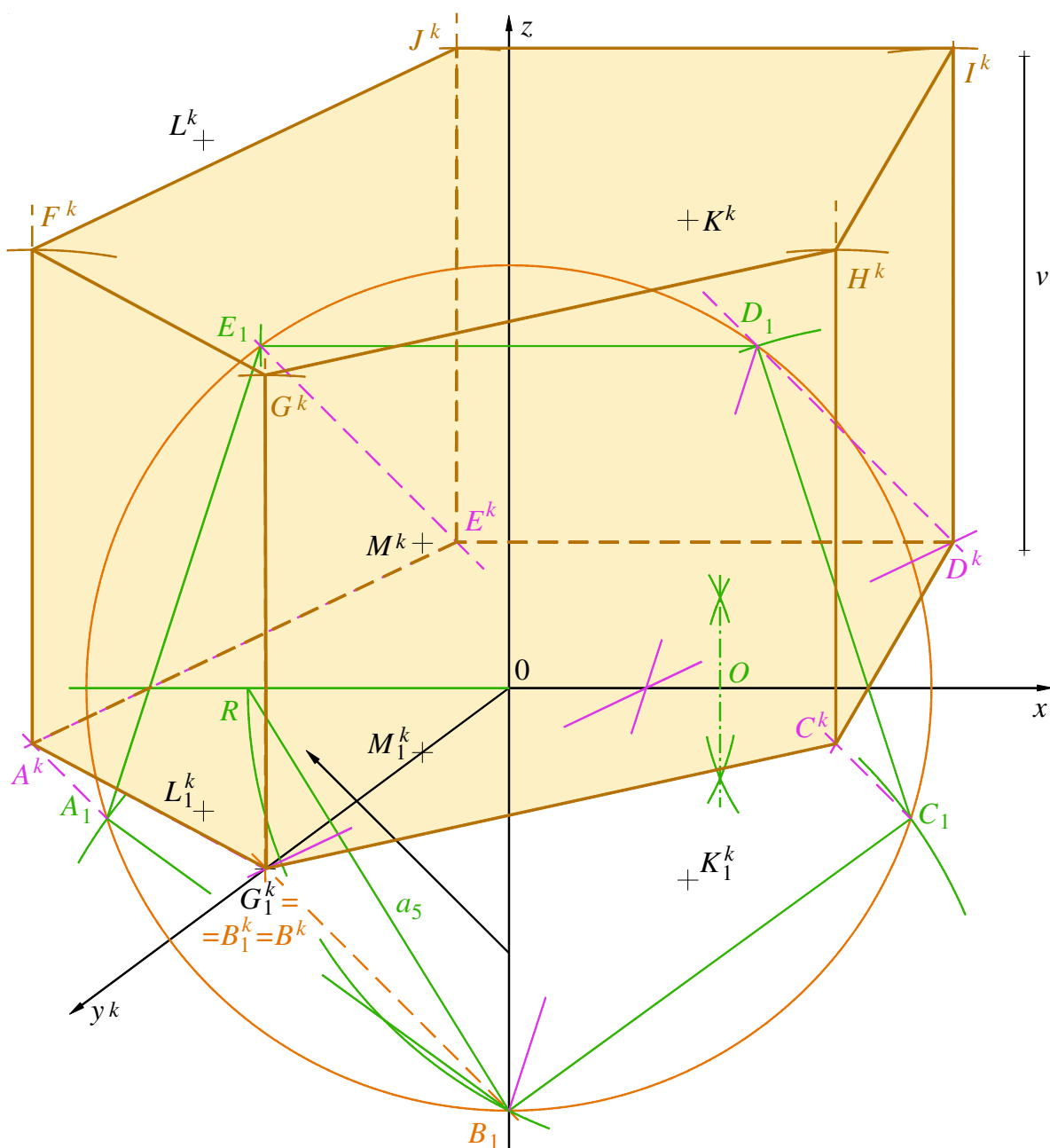
Jelikož je osa tělesa kolmá na půdorysnu, jsou na ni kolmé také boční hrany hranolu. Jednou z nich je i úsečka BG , a proto $G_1^k = B_1^k = B^k$.

Nejprve pomocí přidruženého Mongeova promítání zobrazíme podstavu $ABCDE$ ležící v půdorysně π . Sestrojíme půdorys B_1 vrcholu B a dále půdorys kružnice opsané pravidelnému pětiúhelníku $ABCDE$, což je kružnice, jejímž středem je počátek 0 souřadnicového systému a která prochází bodem B_1 .

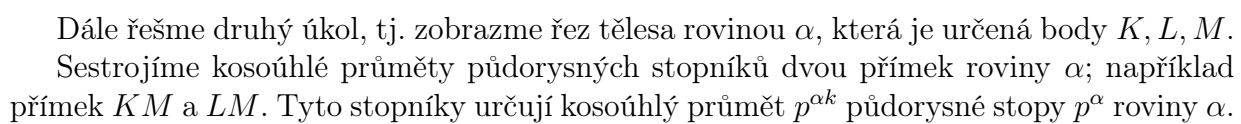


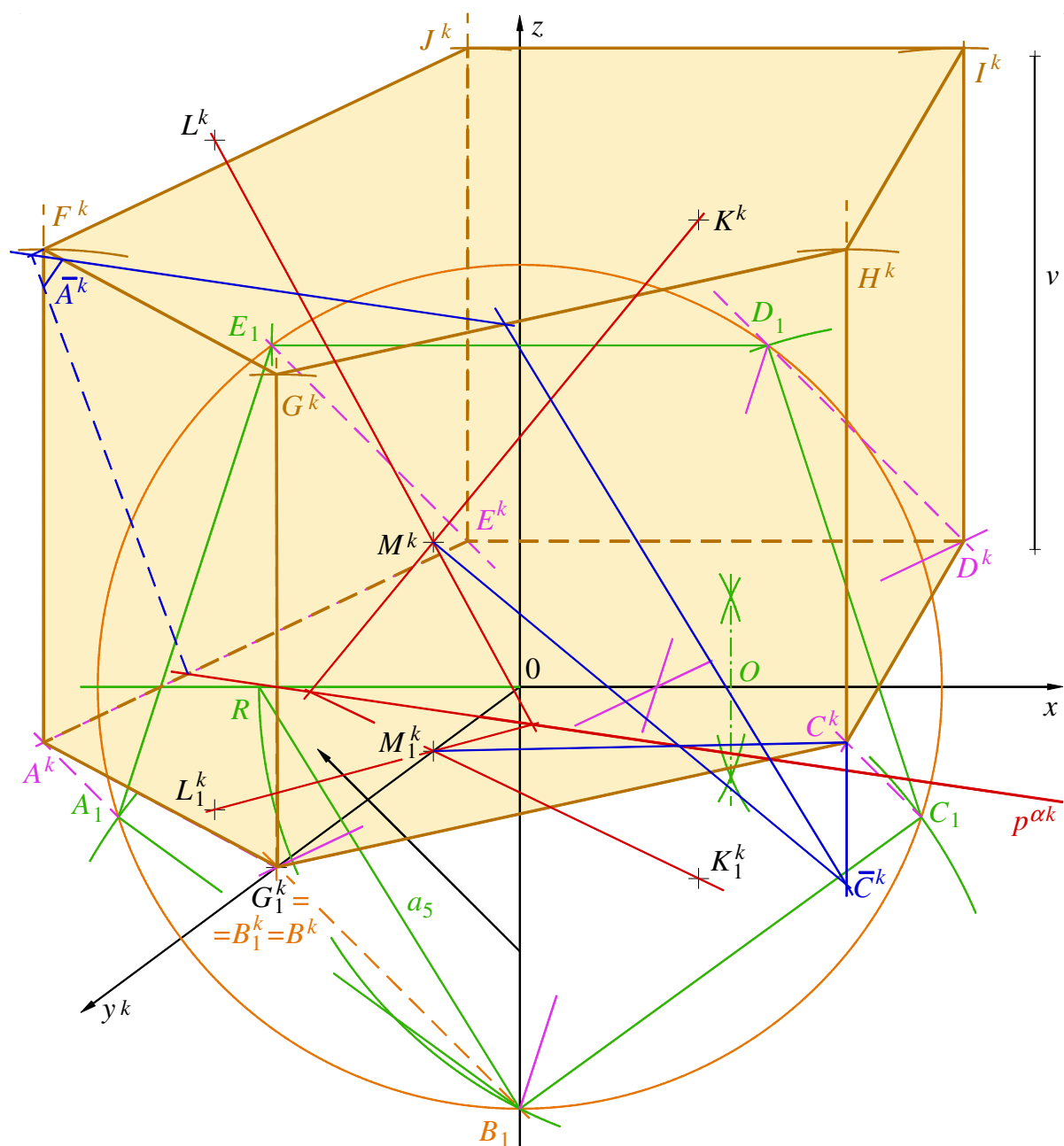


Využitím kosoúhlé osové afinity v rovině, jejíž osou je osa x souřadnicového systému a dvojicí odpovídajících si bodů jsou body B_1 a $B_1^k = B^k$, určíme kosoúhlý průmět $A^k B^k C^k D^k E^k$ (splývající s kosoúhlým půdorysem $A_1^k B_1^k C_1^k D_1^k E_1^k$) podstavy $ABCDE$.



Kosoúhlé průměty bočních hran hranolu jsou rovnoběžné s kosoúhlým průmětem $z^k = z$ osy z souřadnicového systému a jejich délka v se nezkreslí. Při jejich zobrazení přitom dodržíme podmínku, aby podstava $ABCDE$ byla podstavou dolní. Sestrojením kosoúhlých průmětů F^k, G^k, H^k, I^k, J^k vrcholů horní podstavy $FGHIJ$ a jejich spojením (s přihlédnutím k viditelnosti jednotlivých hran mnohostěnu) získáme kosoúhlý průmět hranolu.

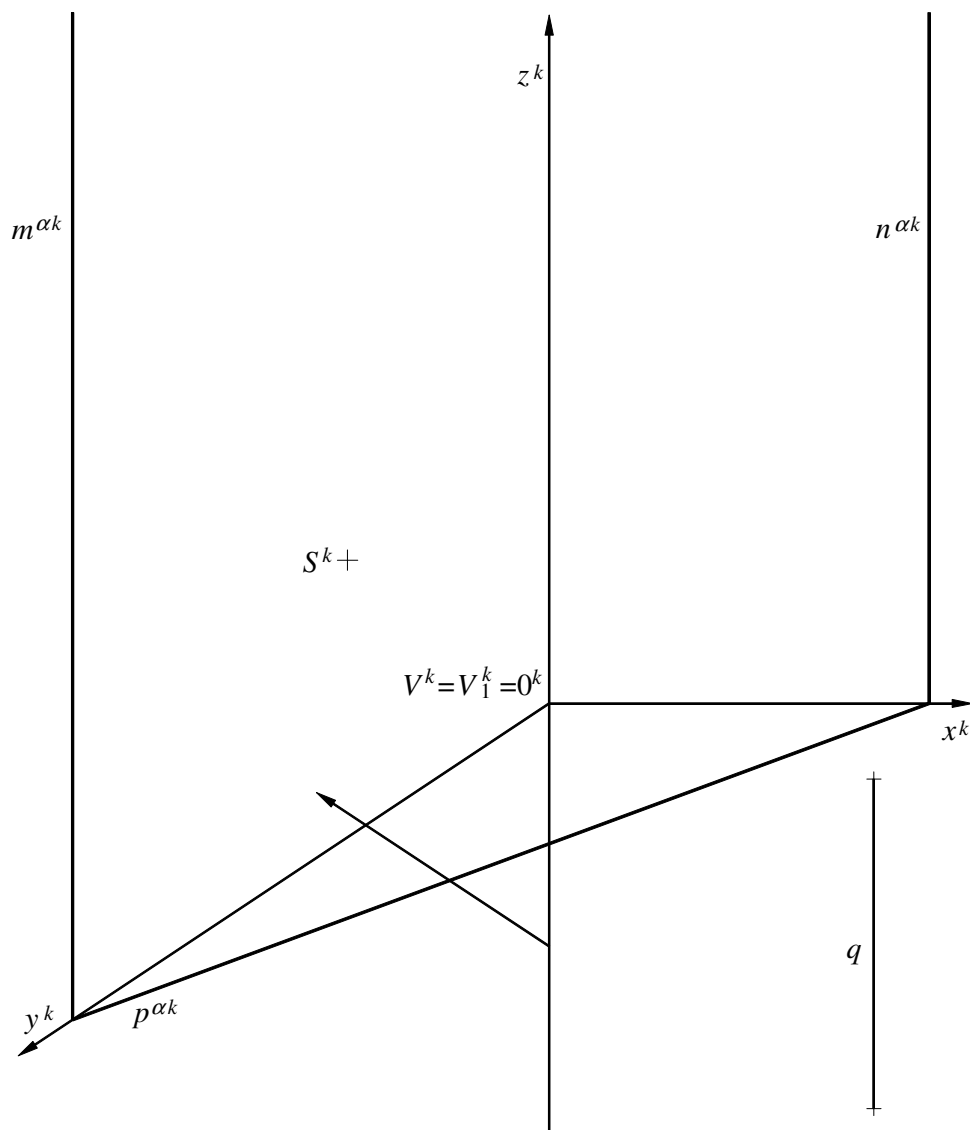


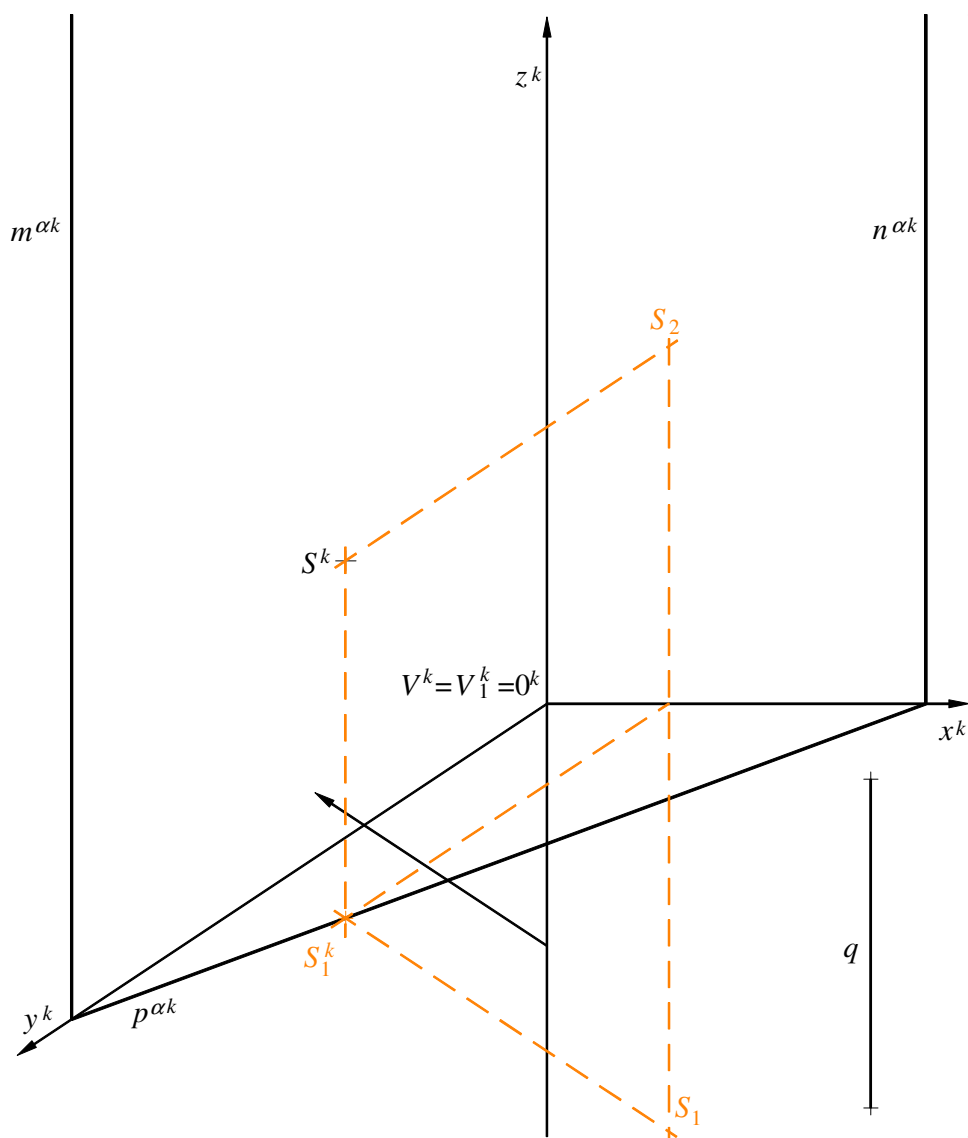


Nyní využijeme osovou afinitu v rovině k sestrojení řezu tělesa. Přímka $p^{\alpha k}$ určuje řez dolní podstavou tělesa a je současně osou uvažované afinity. Dvojicí odpovídajících si bodů jsou např. body M^k a M_1^k (v prostoru si odpovídá dvojice bodů, z nichž jeden leží v rovině řezu α a druhý v půdorysně). Směr osové afinity v rovině je tedy směr (průmětu) osy $z = z^k$.

10

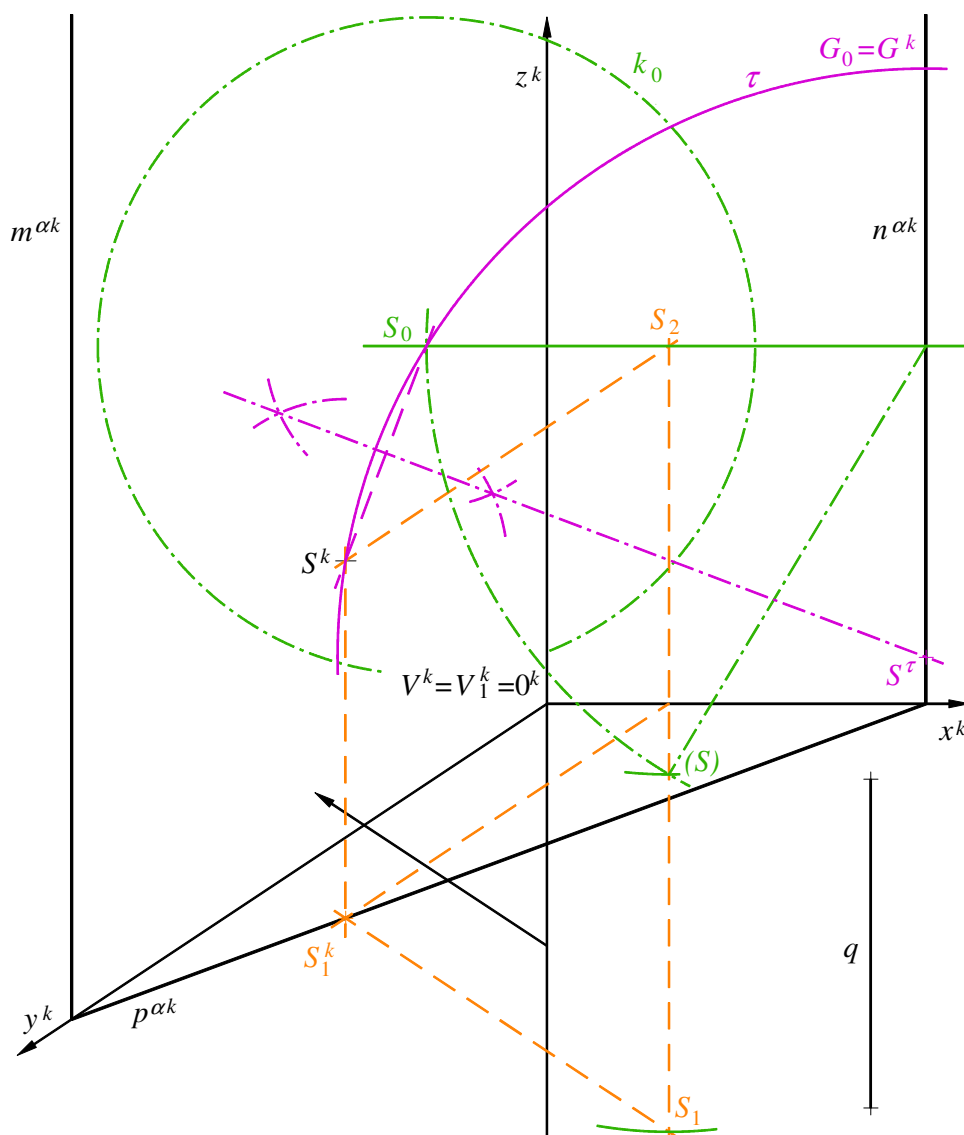
Příklad 2. Sestrojte kosoúhlý průmět kosého kužele, jehož vrchol je V a jehož podstava s hraniční kružnicí $k(S, q)$ leží v dané rovině α .



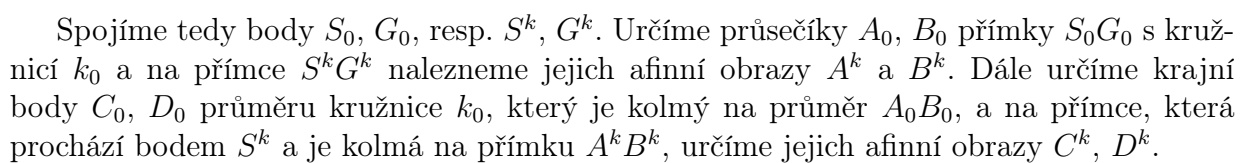


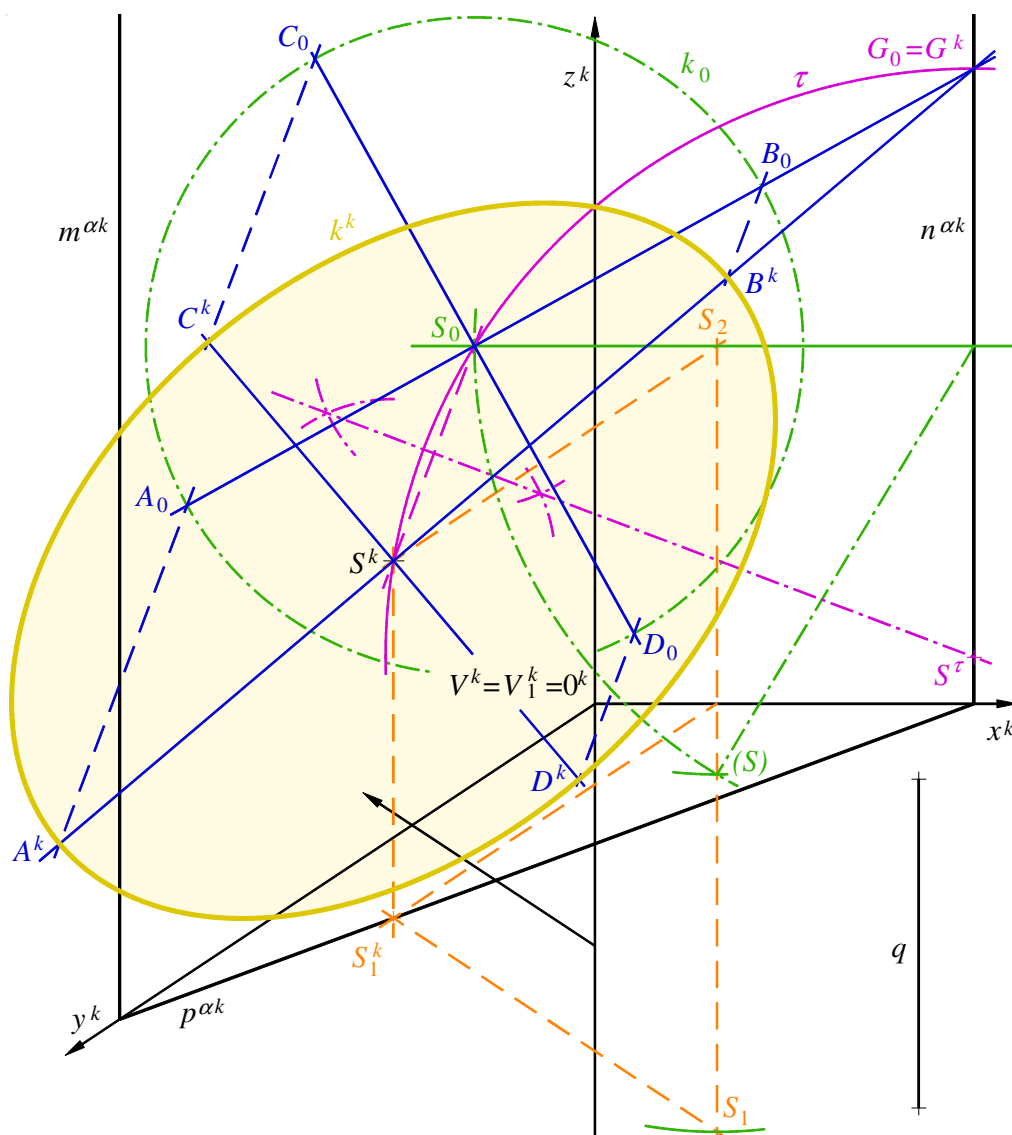
Sestrojíme kosoúhlý průmět k^k kružnice k , která je hraniční kružnicí podstavy kužele. Tímto průmětem k^k je elipsa, jejímž středem je kosoúhlý průmět S^k středu S podstavy.

Využijeme přidružené Mongeovo promítání, v němž sestrojíme půdorys S_1 a nárys S_2 bodu S .



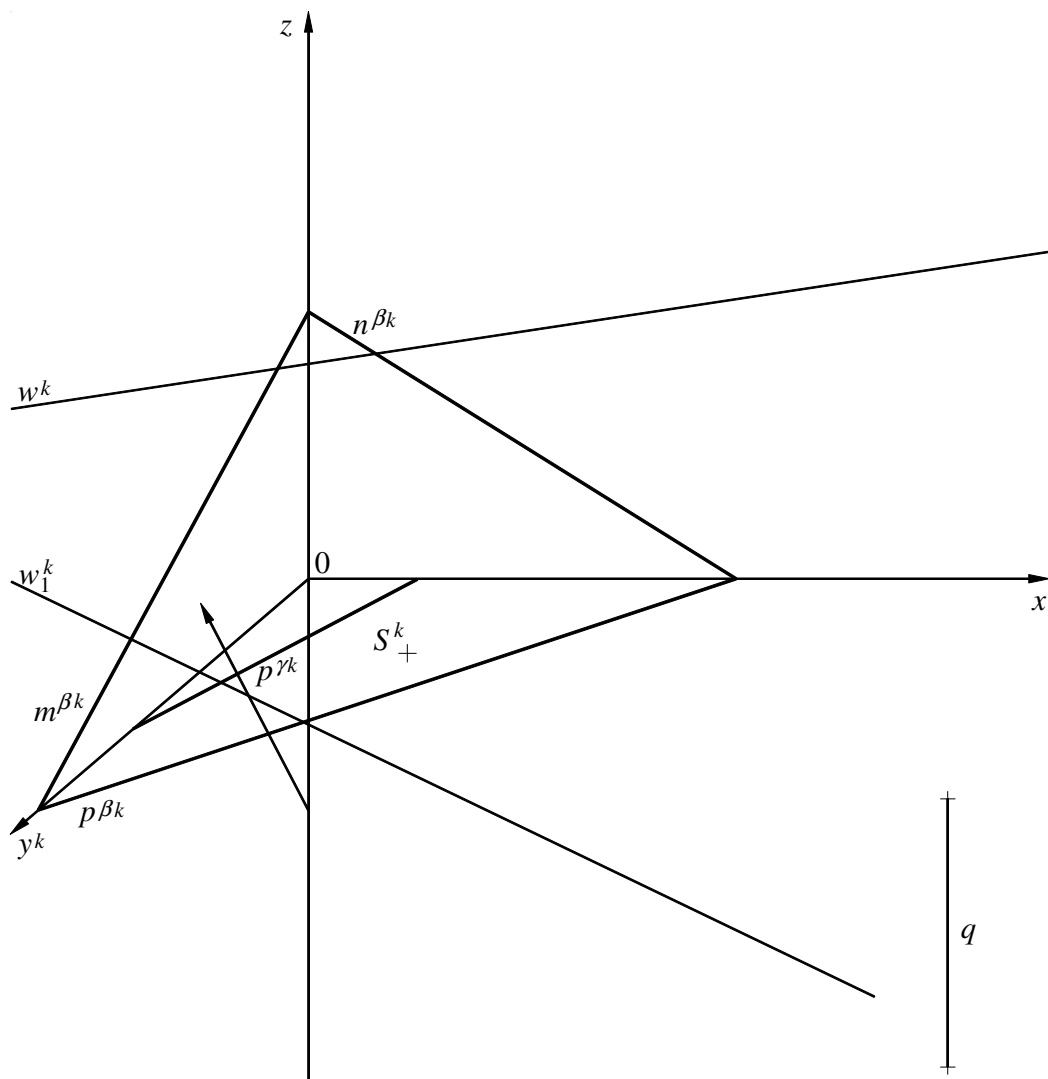
Nyní sestrojíme elipsu k^k jakožto obraz kružnice k_0 v kosoúhlé osové afinitě s osou $n^{\alpha k} = n_2^\alpha$ a dvojicí odpovídajících si bodů S_0, S^k . Sdružené průměry kružnice k_0 , které se zobrazí na osy elipsy k^k , určíme pomocí Thalétovy kružnice τ . Její střed S^τ je průsečíkem osy afinity $n^{\alpha k} = n_2^\alpha$ a osy úsečky $S_0 S^k$. Těmito body S_0, S^k přitom Thalétova kružnice τ prochází. Její průsečík $G_0 = G^k$ s osou afinity je samodružný bod, kterým prochází jeden z průměrů kružnice, který se zobrazí na jednu z os elipsy k^k .

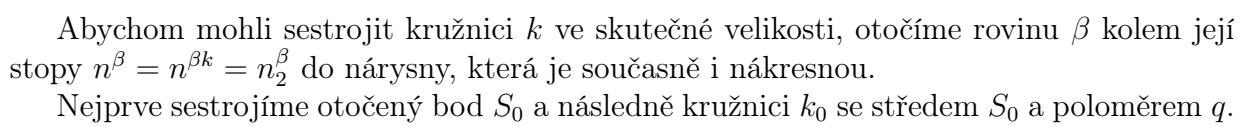


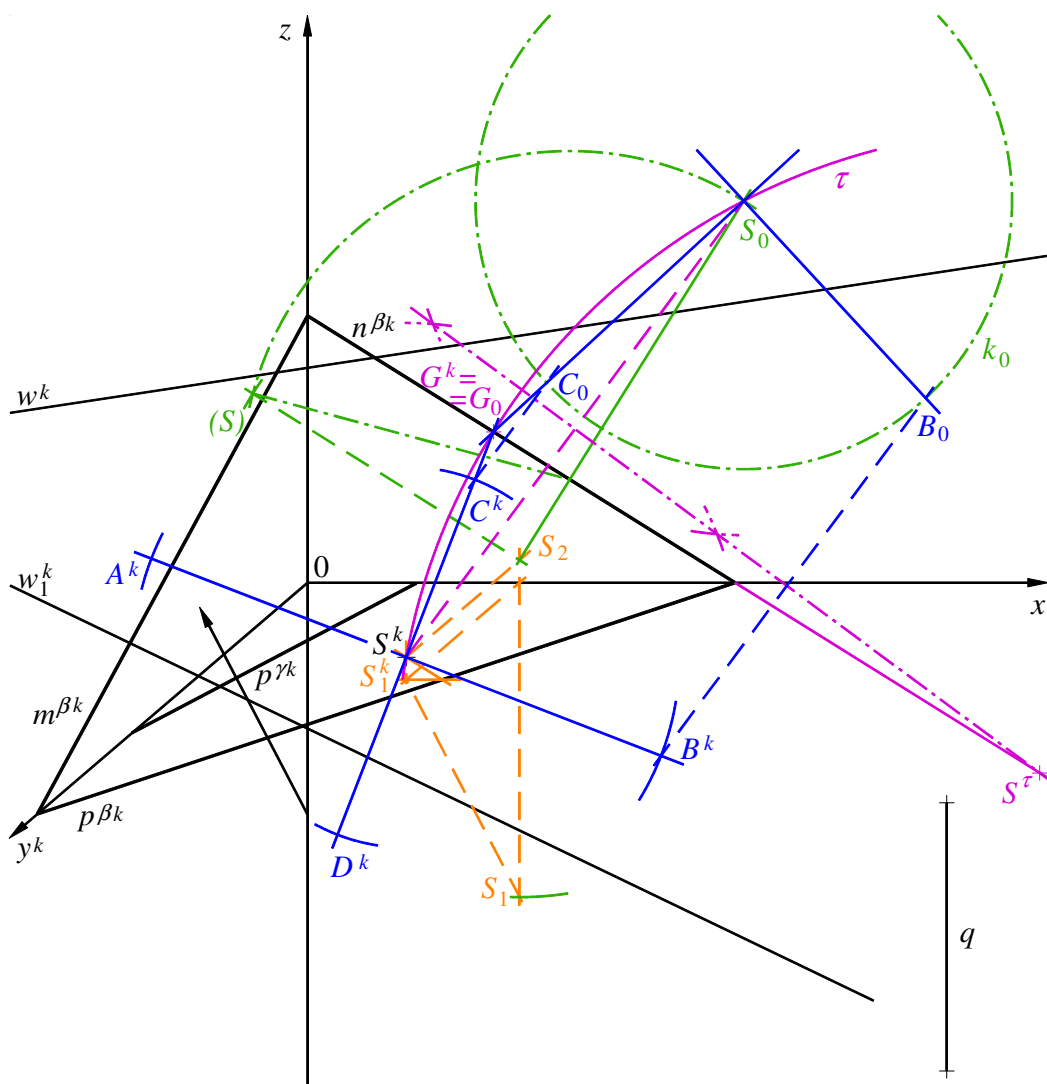


Hlavními vrcholy A^k , B^k a vedlejšími vrcholy C^k , D^k je elipsa k^k jednoznačně určena. Jelikož kosoúhlý průmět V^k vrcholu V kužele leží ve vnitřní oblasti elipsy k^k , je tato elipsa spolu s její vnitřní částí nejen průmětem podstavy kužele, ale i celého tělesa.

Příklad 3. Sestrojte kosoúhlý průmět kosého kužele, jehož podstavou je kruh s hraniční kružnicí $k(S, q)$ ležící v dané rovině β . Vrchol V kužele leží na přímce w a také v rovině γ kolmé na půdorysnu.

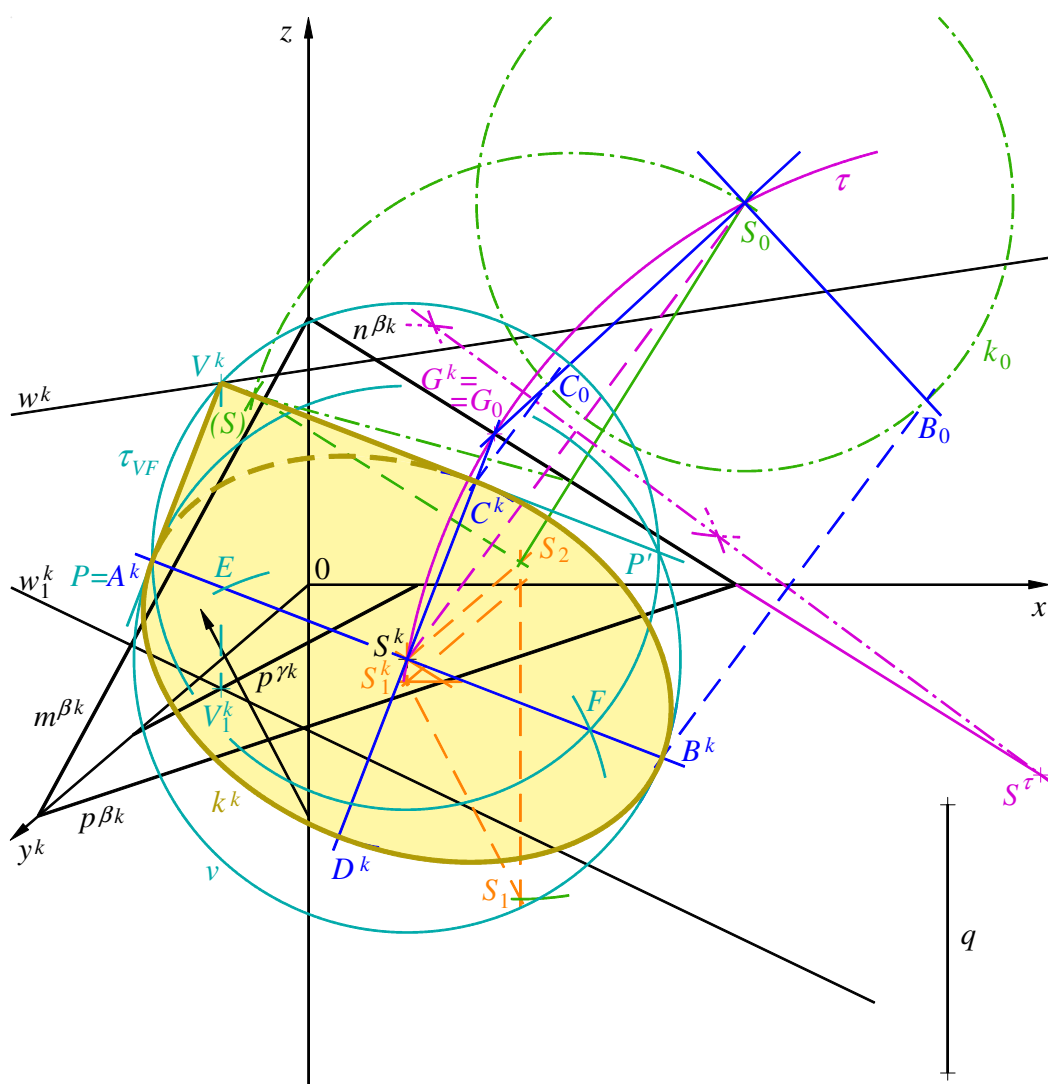






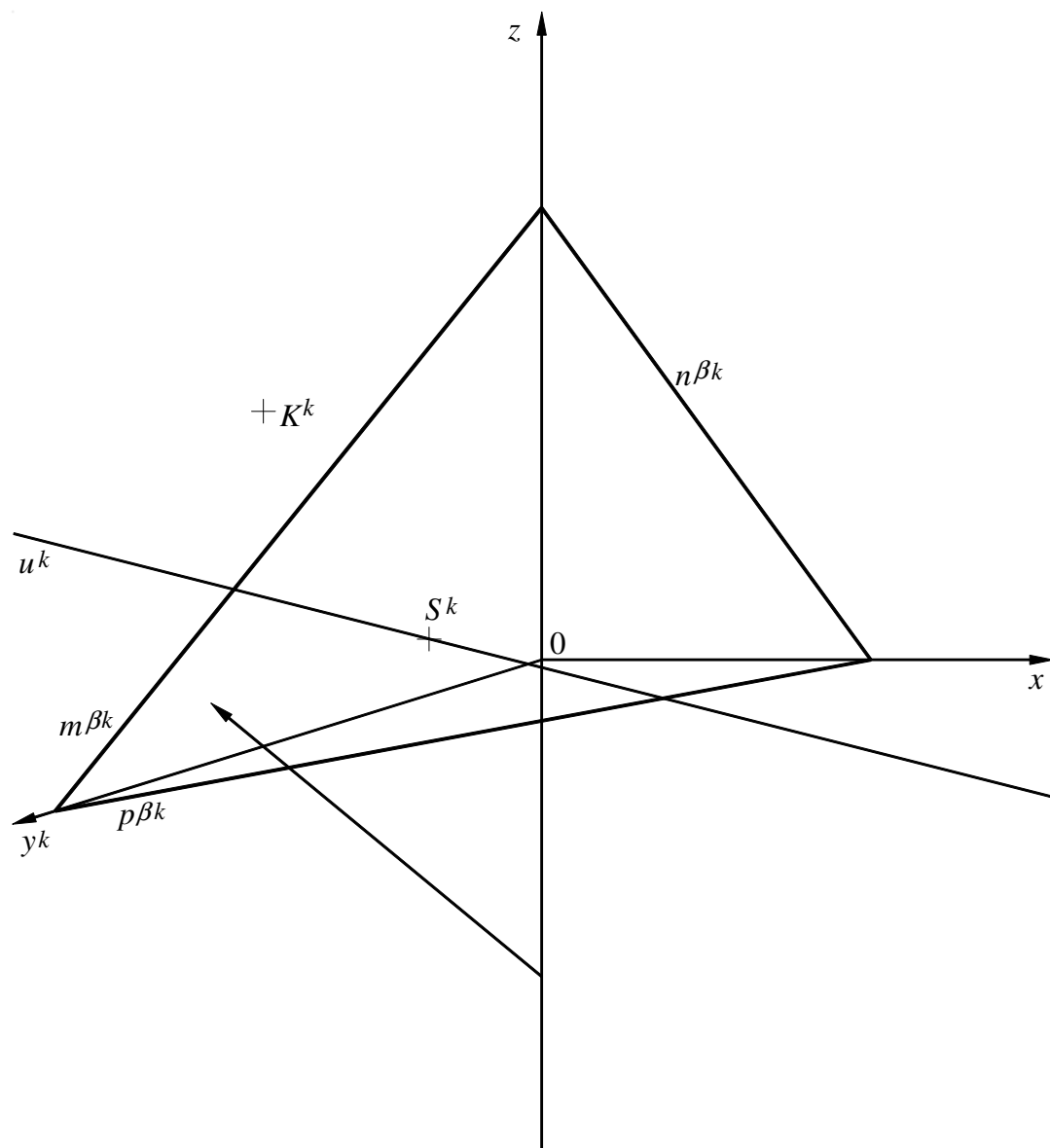
Sestrojíme přímku G_0S_0 a dále kolmici na tuto přímku vedenou bodem S_0 . Určíme alespoň jeden z průsečíků každé z těchto kolmic s kružnicí k_0 . Na obrázku jsou tyto průsečíky označeny B_0 a C_0 .

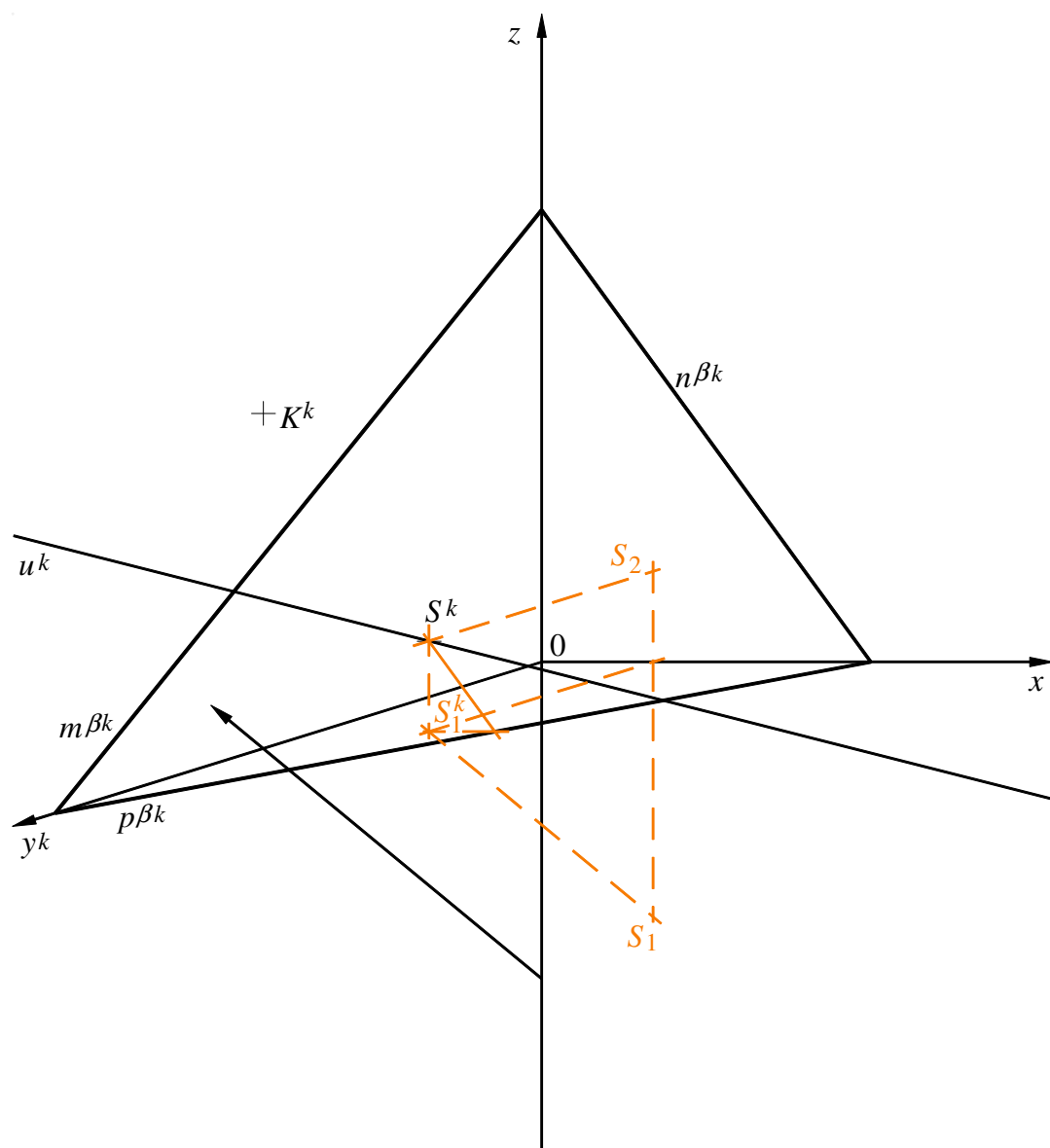
Dále sestrojíme přímku G^kS^k a na ni kolmou přímku vedenou bodem S^k . Na těchto přímkách nalezneme obrazy B^k a C^k bodů B_0 a C_0 v uvažované afinitě. Bod B^k , resp. C^k je hlavním, resp. vedlejším vrcholem konstruované elipsy k^k . Zbývající vrcholy A^k a D^k lze určit pomocí středové souměrnosti elipsy.



Zdánlivý obrys kužele je složen z úseček $V^k A^k$, $V^k C^k$ a z části elipsy k^k . Pokud si totiž představíme rovinu β' , která prochází bodem V a je rovnoběžná s rovinou β (stačí si představit např. hlavní přímkou druhé osnovy roviny β' procházející bodem V a její půdorysný stopník), zjistíme, že vrchol V leží „před“ rovinou β , a tedy část elipsy k^k není vidět.

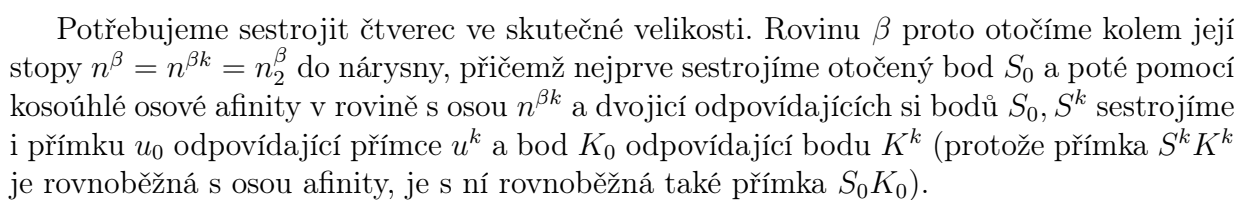
Příklad 4. Sestrojte kosoúhlý průmět krychle $ABCDEFGH$, jejíž stěna $ABCD$ leží v rovině β a má střed S . Jedna úhlopříčka stěny $ABCD$ leží na přímce u a kružnice této stěně opsaná prochází bodem K . Sestrojte takové řešení, aby $z^C < z^G$.

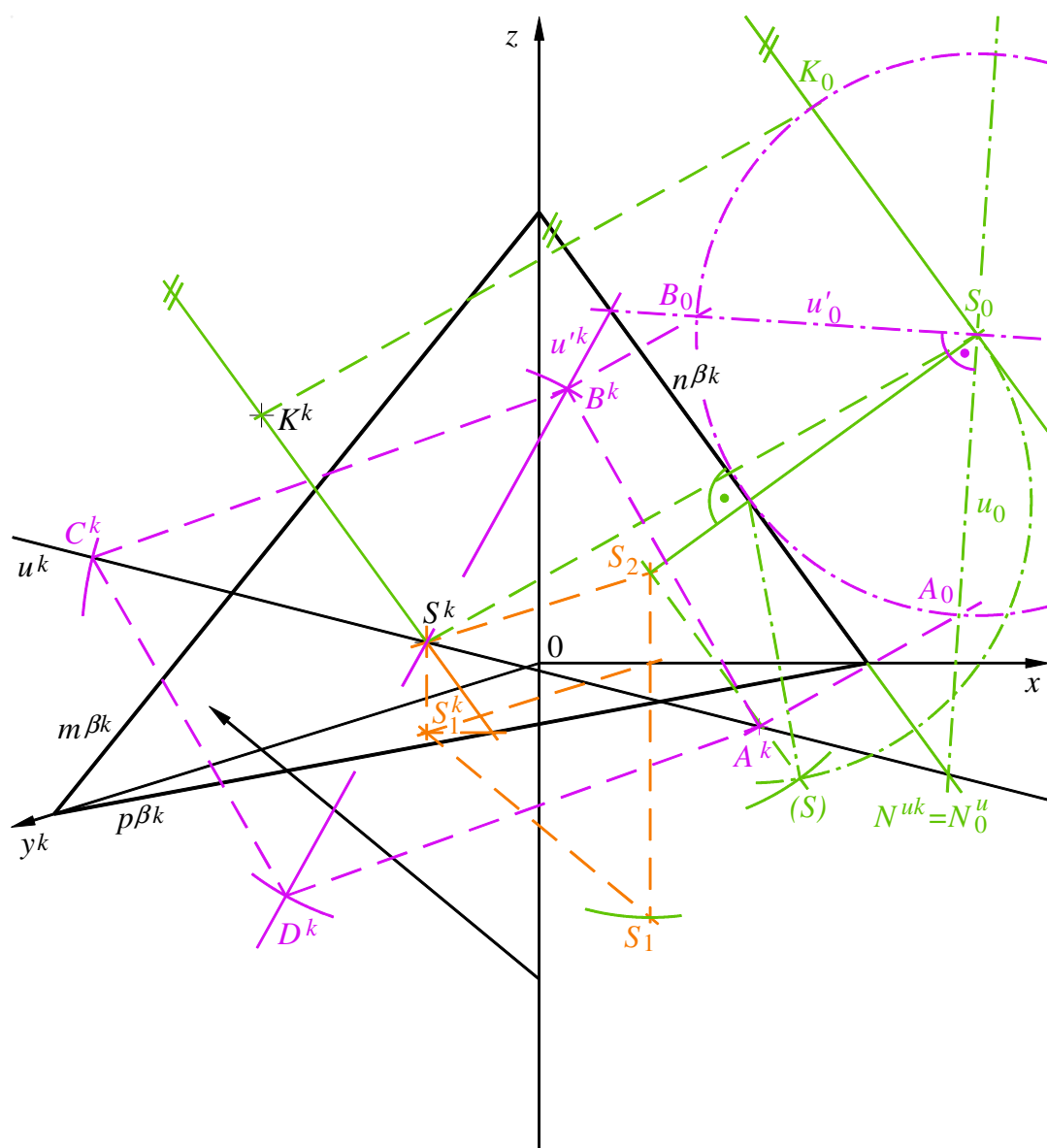




Nejprve určíme kosoúhlý průmět čtvercové stěny $ABCD$ ležící v rovině β a mající střed S .

V přidruženém Mongeově promítání proto sestojíme půdorys S_1 a nárys S_2 bodu S .

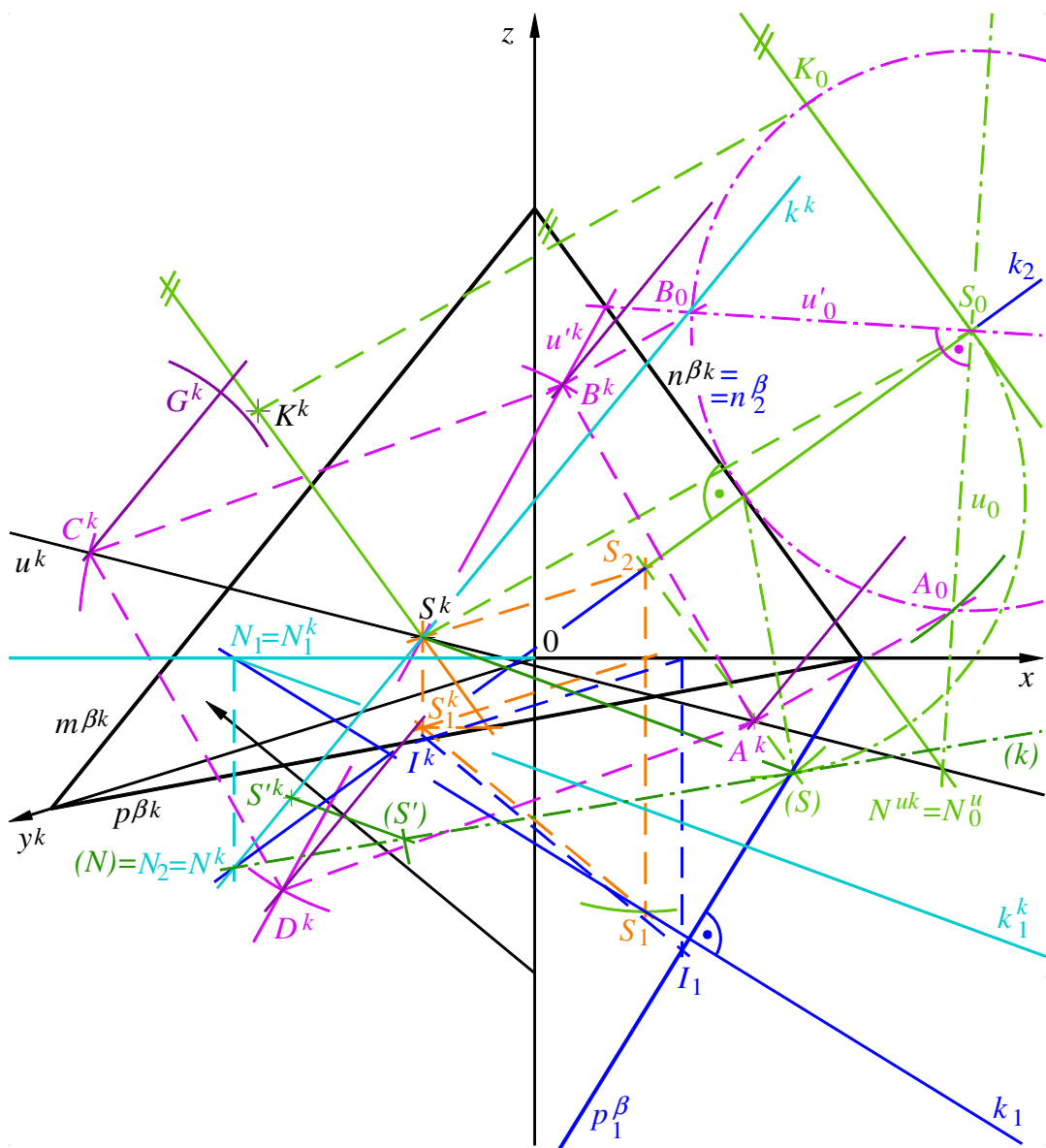




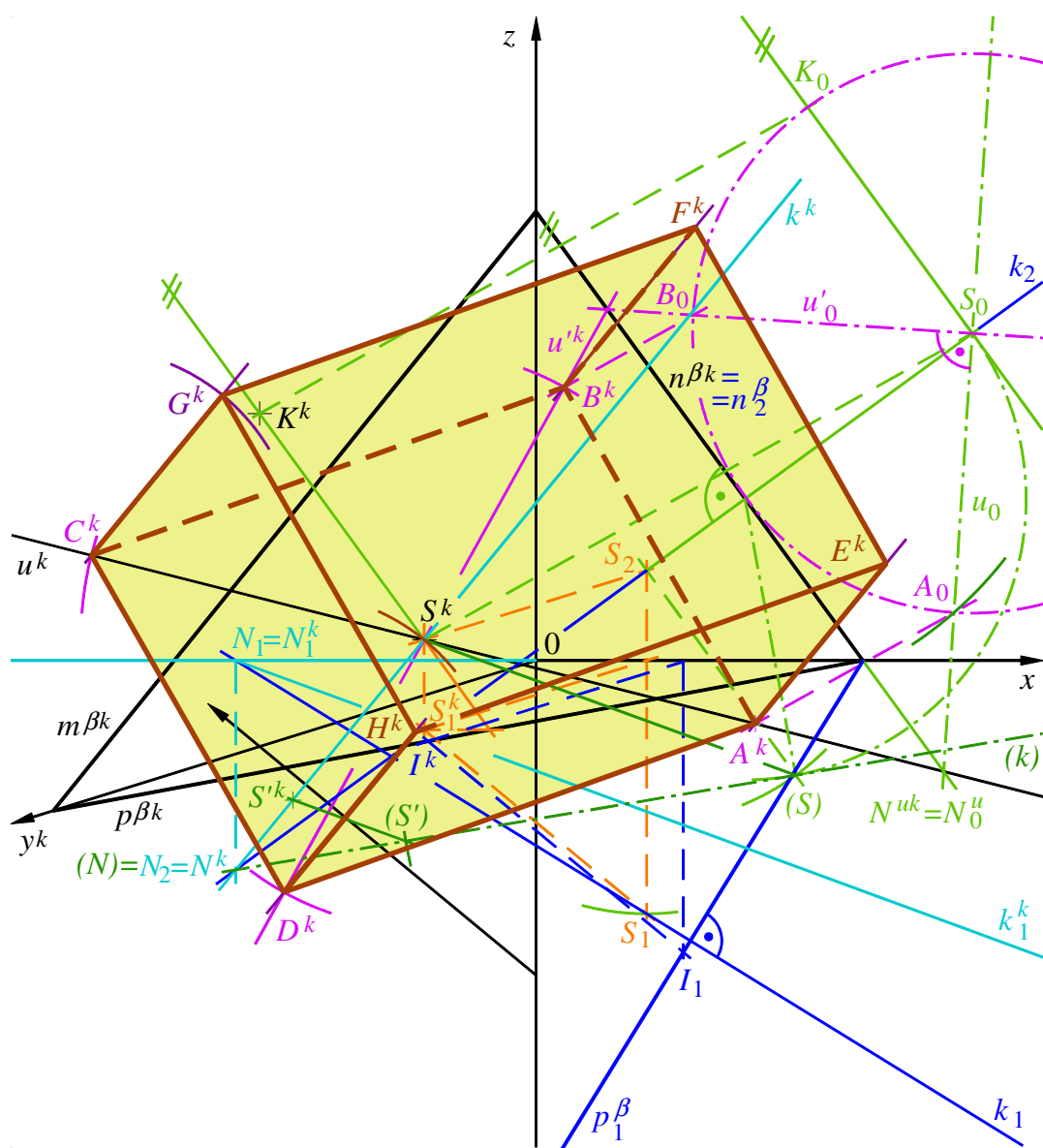
Sestrojíme kružnici o středu S_0 procházející bodem K_0 a určíme alespoň jeden její průsečík A_0 s přímkou u_0 . Bod A_0 je otočený vrchol A stěny krychle. Otočený bod B_0 je průsečíkem sestrojené kružnice s kolmicí u'_0 na přímkou u_0 vedenou bodem S_0 .

Pro body A_0, B_0 zkonstruujeme body A^k, B^k , které jim odpovídají v uvažované afinitě, a poté pomocí středové souměrnosti se středem S^k sestrojíme zbývající vrcholy C^k, D^k rovnoběžníku $A^k B^k C^k D^k$, který je kosoúhlým průmětem čtverce $ABCD$.



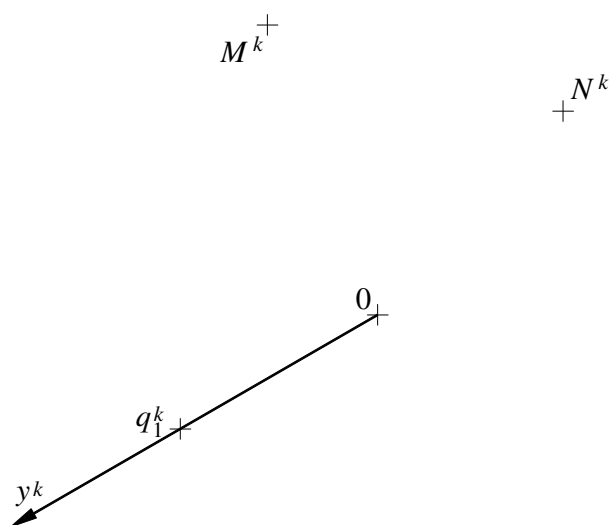


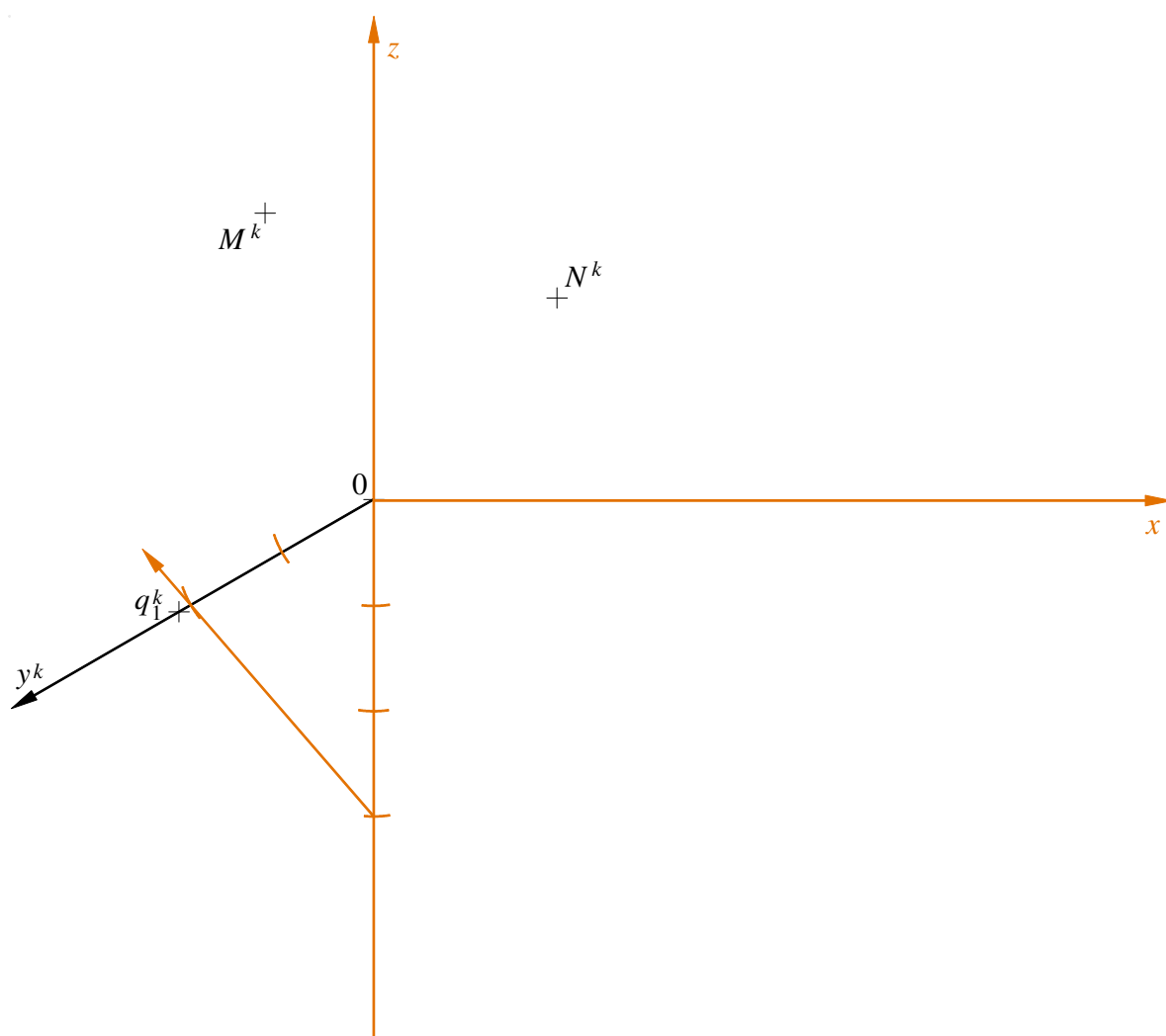
Body A^k, B^k, C^k, D^k vedeme rovnoběžky s přímkou k^k (na nich leží kosoúhlé průměty čtyř hran krychle). Naneseme-li například od bodu C^k na příslušnou přímku vzdálenost $|S'^k S^k|$, přičemž bereme ohled na podmínku $z^C < z^G$, získáme kosoúhlý průmět G^k vrcholu G krychle.



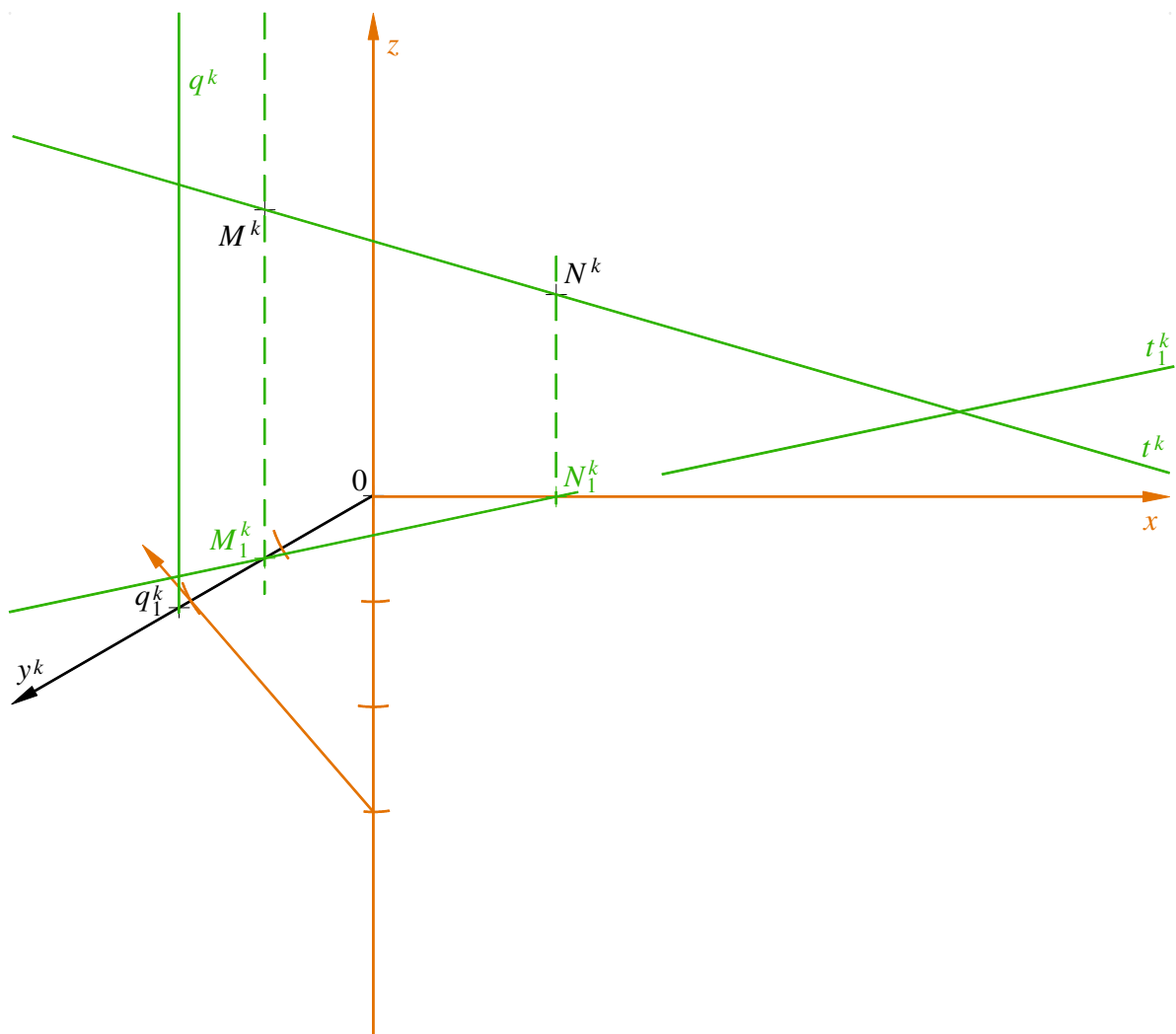
Tutéž vzdálenost nanese na připravené kosoúhlé průměty kolmic k rovině β týmž směrem i od bodů A^k, B^k, D^k , čímž získáme zbývající kosoúhlé průměty E^k, F^k, H^k vrcholů E, F, H krychle. Nakonec s ohledem na viditelnost hran zvýrazníme jejich průměty, čímž je kosoúhlý průmět krychle $ABCDEFGH$ sestrojen.

Příklad 5. V kosoúhlém promítání s kvociemtem 2 : 3 a směrem promítání takovým, že platí $|\angle xy^k| = 150^\circ$, sestrojte kosoúhlý průmět rotační válcové plochy, která se dotýká bokorysny $\mu = (y, z)$ podél přímky q a jejíž tečnou je přímka MN , kde bod M leží v bokorysně $\mu = (y, z)$ a N leží v nárysně $\nu = (x, z)$. Sestrojte takové řešení, v němž mají všechny body válcové plochy nezáporné x -ové souřadnice. Poté sestrojte kosoúhlý průmět válce, jehož plášť leží na sestrojené válcové ploše a jehož výška má délku rovnou $3/2$ délky poloměru jeho podstav. Část válce leží nad půdorysnou a část pod ní, přičemž část ležící nad půdorysnou zaujímá $\frac{2}{3}$ jeho objemu.





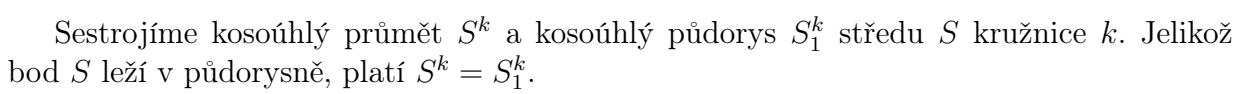
Na základě daného koeficientu kosoúhlého promítání a odchylky osy x a kosoúhlého průmětu y^k osy y zobrazíme zbývající osy souřadnicového systému a rovněž směr zkosení kosoúhlého promítání.



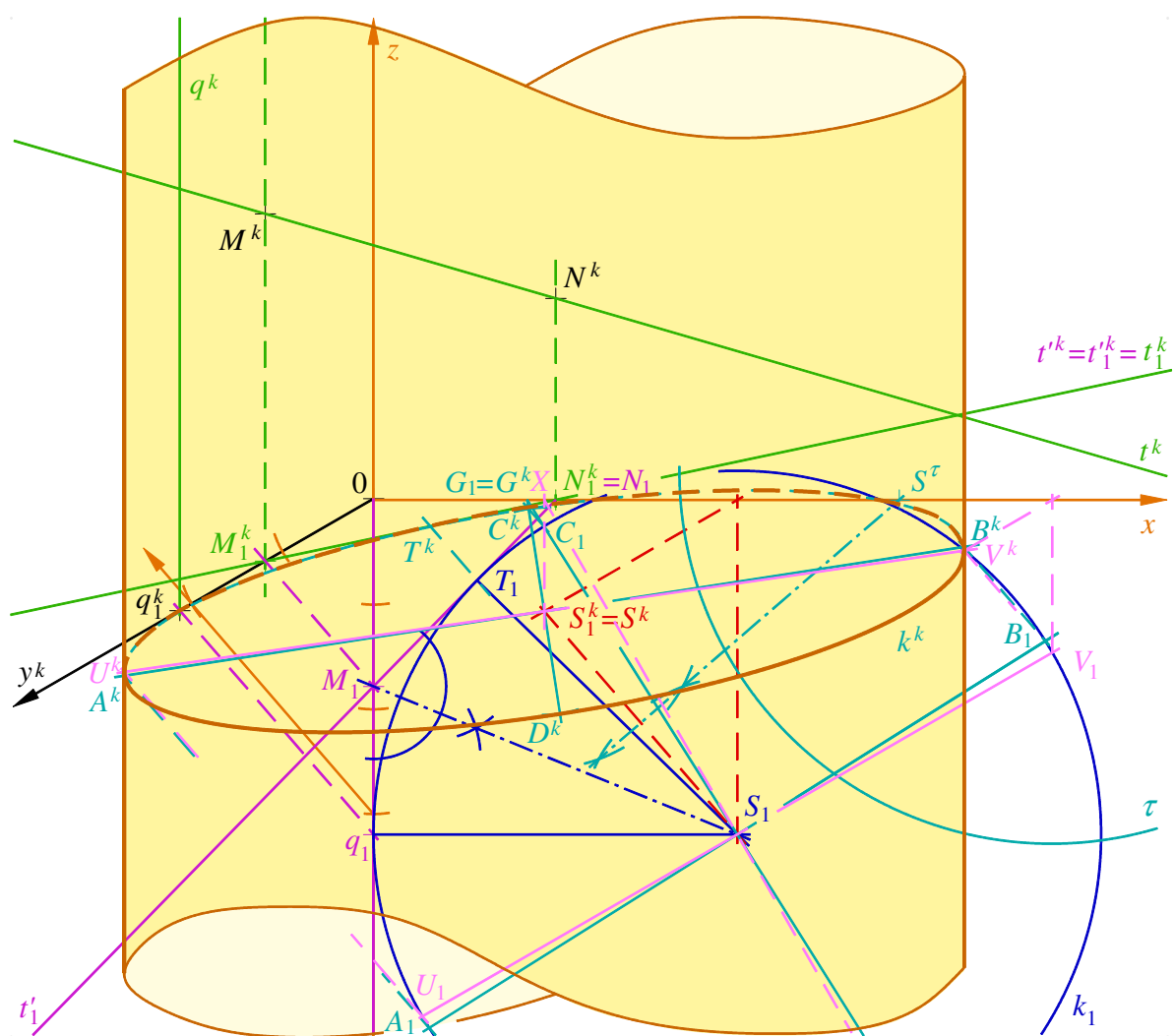
Kosoúhlý půdorys q_1^k přímky q je bod, proto je přímka q kolmá na půdorysnu a její kosoúhlý průmět q^k je rovnoběžka s kosoúhlým průmětem $z^k = z$ osy z procházející bodem q_1^k (přímku q^k není nezbytně nutné zkonstruovat).

Osa válcové plochy je rovnoběžná s přímkou q , a tudíž řezy plochy rovinami rovnoběžnými s půdorysnou jsou kružnice. Sestrojíme kosoúhlý průmět k^k kružnice k , která je průnikem válcové plochy a půdorysny. Tímto průmětem je elipsa (viz další strany), jejímiž tečnami jsou přímky y^k a t_1^k , kde $t_1^k = M_1^k N_1^k$ je kosoúhlý půdorys tečny $t = MN$, přičemž elipsa k^k a přímka y^k se dotýkají v bodě q_1^k . Určíme tedy kosoúhlé půdorysy M_1^k, N_1^k bodů M, N a následně přímku $t_1^k = M_1^k N_1^k$ (můžeme sestrojit také kosoúhlý průmět $t^k = M^k N^k$ tečny $t = MN$, není to však nezbytně nutné).

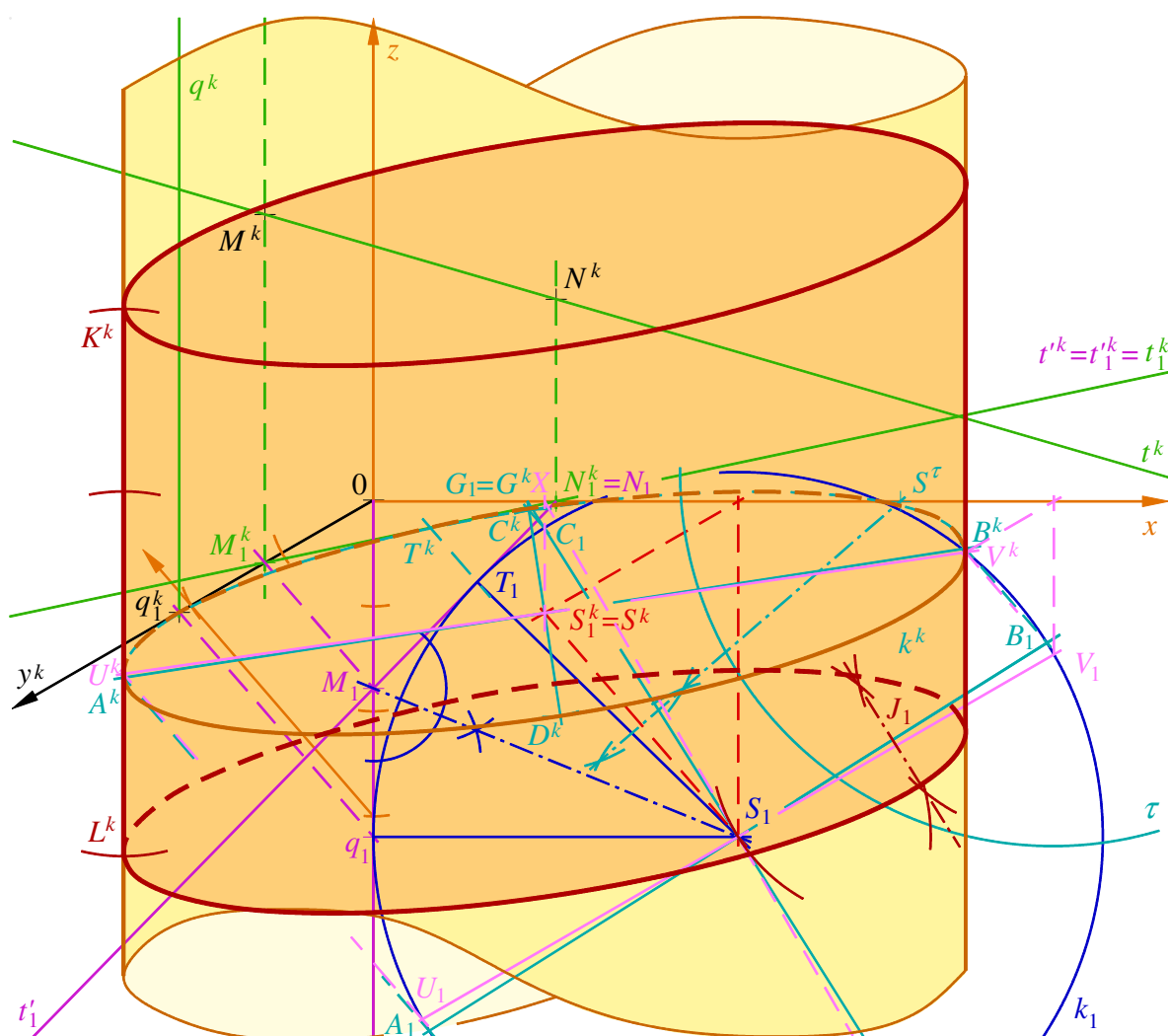








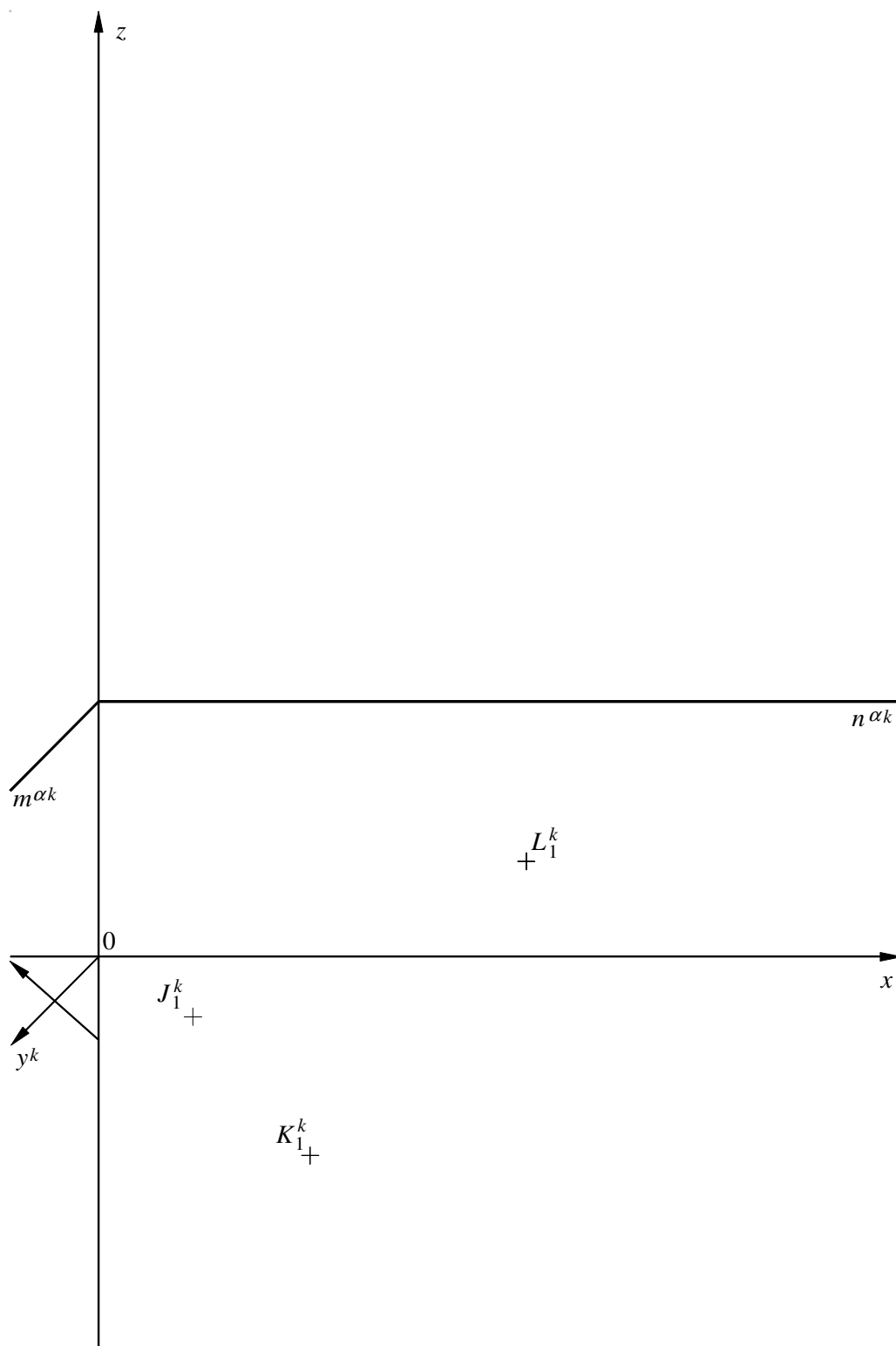
Body U^k , V^k vedeme tečny elipsy k^k rovnoběžné s přímkou z . Tyto navzájem rovnoběžné přímky tvoří zdánlivý obrys zobrazované rotační plochy, tj. určují rovinný pás, který je jejím kosoúhlým průmětem.

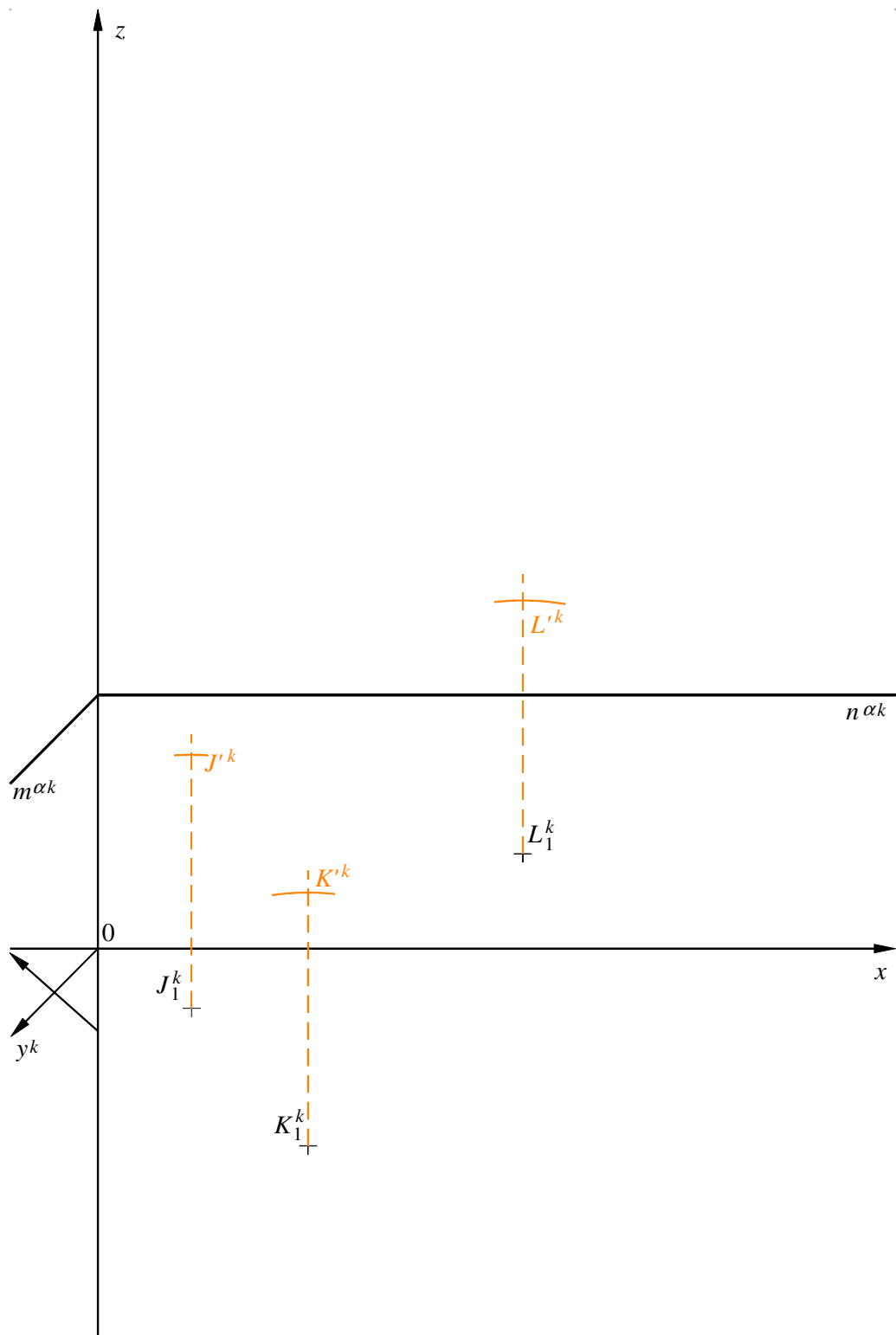


Nyní zobrazme válec požadovaných vlastností. Tento válec je rotační, jeho osa leží na ose sestrojené válcové plochy, a jeho podstavy tedy leží v rovinách rovnoběžných s půdorysnou. Protože jeho část ležící nad půdorysnou zaujímá $\frac{2}{3}$ objemu celého tělesa, platí totéž i pro jeho povrchy, tj. $\frac{2}{3}$ délky každé z nich leží nad půdorysnou. Označíme-li r poloměr podstav, jsou $\frac{2}{3}$ délky povrchy rovny $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}r = r$. Část každé z povrchek ležící pod půdorysnou má délku $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}r = \frac{r}{2}$.

Sestrojíme-li střed J_1 úsečky S_1B_1 , platí $|S_1J_1| = \frac{1}{2}r$. Naneseme-li tuto vzdálenost na přímku, která prochází bodem U^k a která je součástí zdánlivého obrysu rotační válcové plochy, od bodu U^k jednou, resp. dvakrát v záporném, resp. kladném směru osy z , získáme bod, který označíme L^k , resp. K^k . Zobrazíme-li elipsu k^k v translaci s vektorem posunutí U^kL^k , resp. U^kK^k , získáme kosoúhlý průmět hraniční kružnice dolní, resp. horní podstavy válce. Kromě částí právě zkonstruovaných elips jsou součástí zdánlivého obrysu válce i dvě navzájem rovnoběžné úsečky (jednou z nich je úsečka L^kK^k).

Příklad 6. Sestrojte kosoúhlý průmět rovnostranného válce, jehož dolní podstava leží v rovině α a na jehož plášti leží body J , K a L .

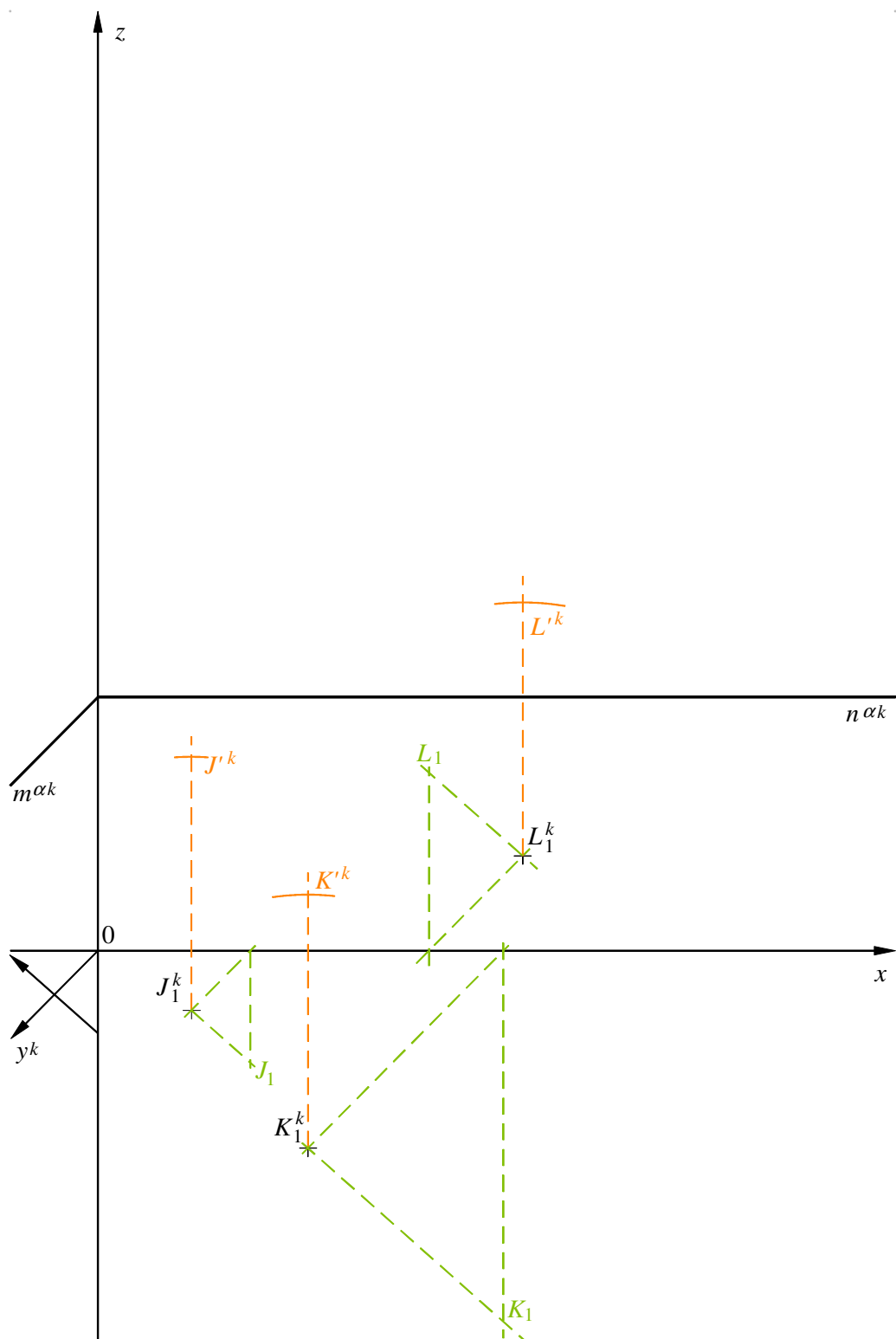




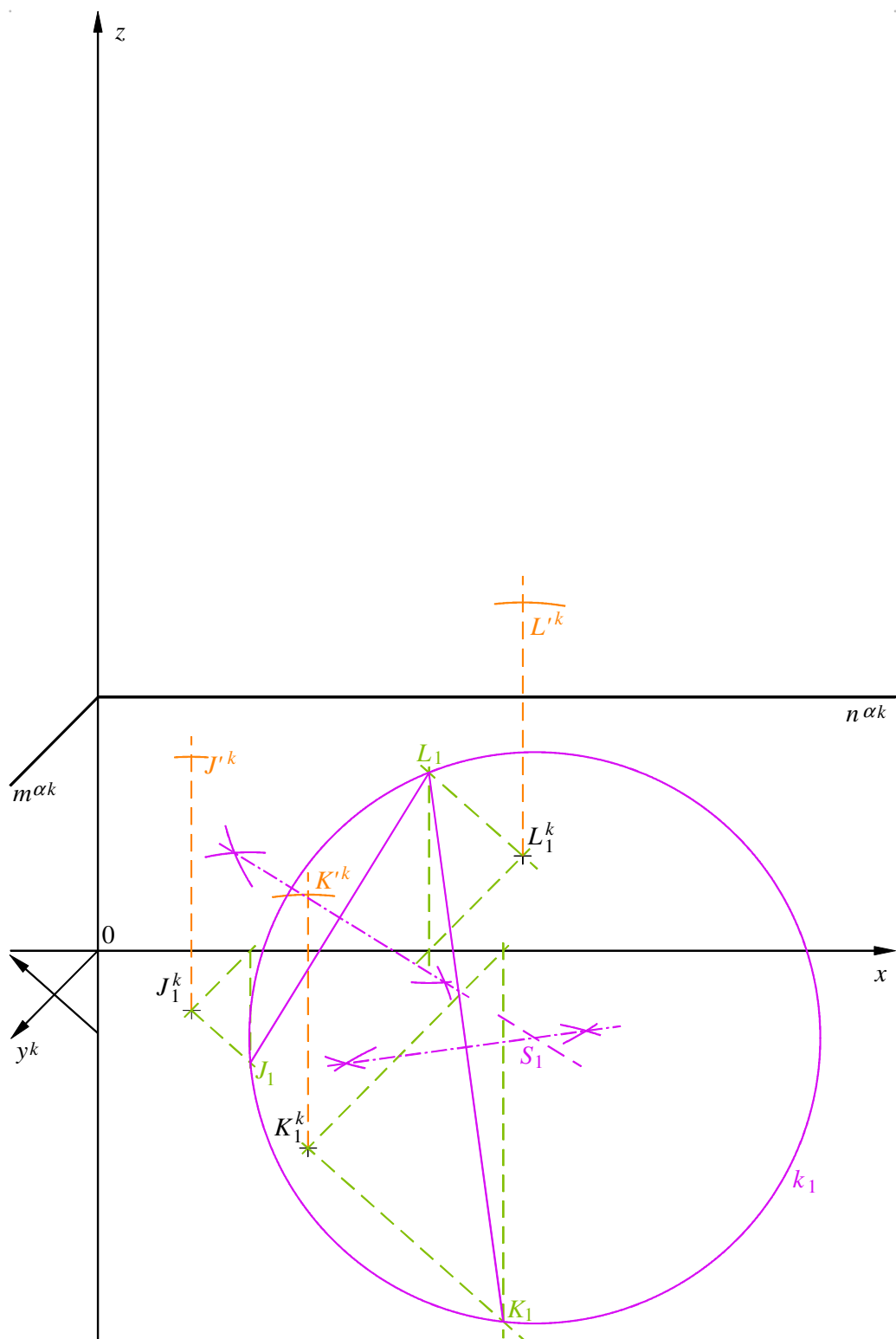
Protože je rovina α vodorovná s půdorysnou, je osa válce rovnoběžná s osou z souřadnicového systému.

Přesné polohy bodů J , K , L ležících na plášti válce nelze ze zadání určit. Můžeme však snadno určit kosoúhlé průměty J'^k , K'^k , L'^k jejich ortogonálních projekcí J' , K' , L' do roviny α . Kosoúhlé půdorysy bodů J' a J , K' a K , L' a L splývají a z -ové souřadnice bodů J' , K' , L' jsou rovny vzdálenosti rovin π a α , tj. vzdálenosti osy x od nárysné stopy n^α roviny α (tato vzdálenost se přitom při promítání nezkruslí).

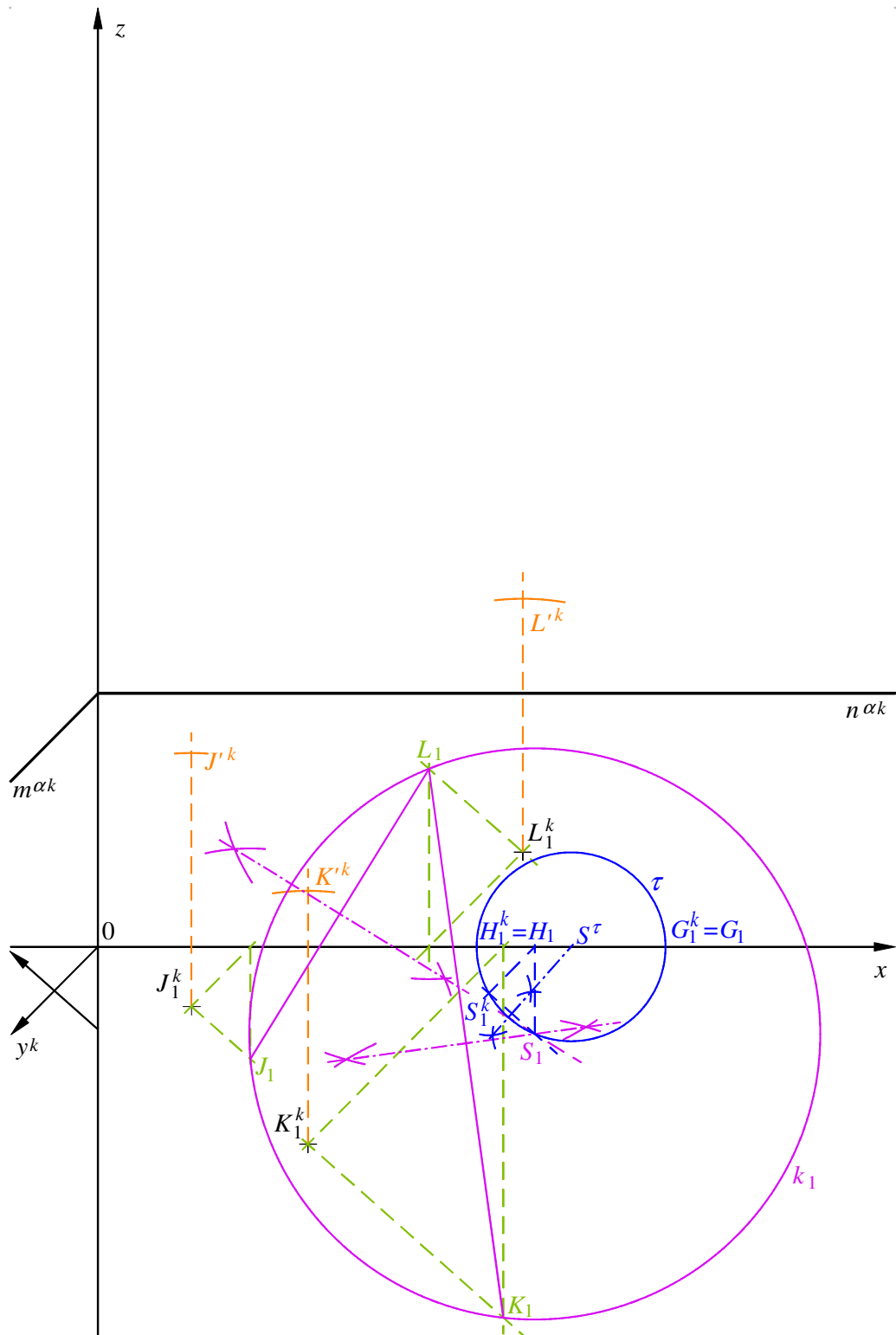
Body J' , K' , L' leží na hraniční kružnici k dolní podstavy válce. Jejím kosoúhlým průmětem je elipsa k^k (viz dále), která prochází průměty J'^k , K'^k , L'^k .



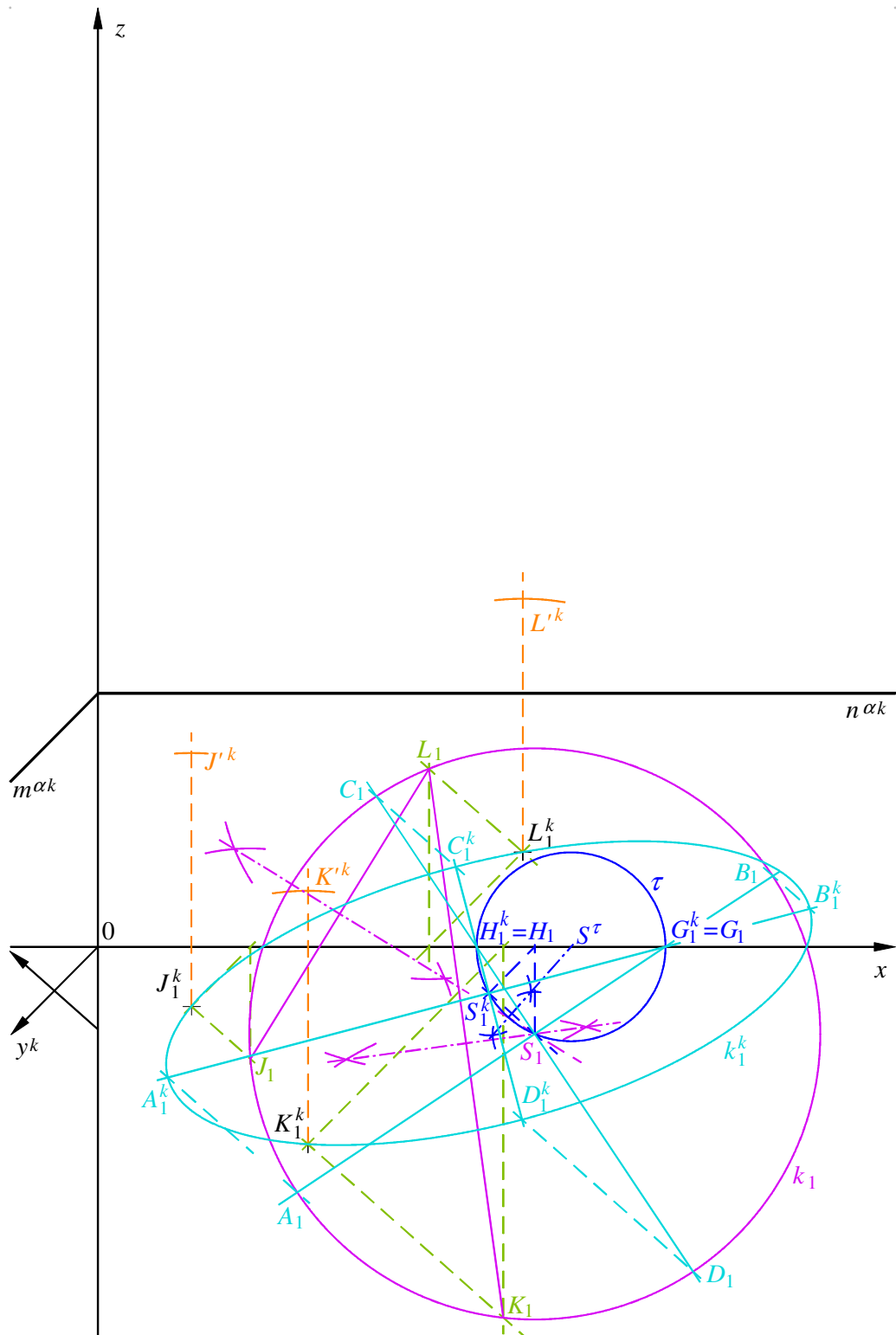
V přidruženém Mongeově promítání sestrojíme půdorysy J_1, K_1, L_1 bodů J, K, L (tyto půdorysy splývají s půdorysy J'_1, K'_1, L'_1 bodů J', K', L').



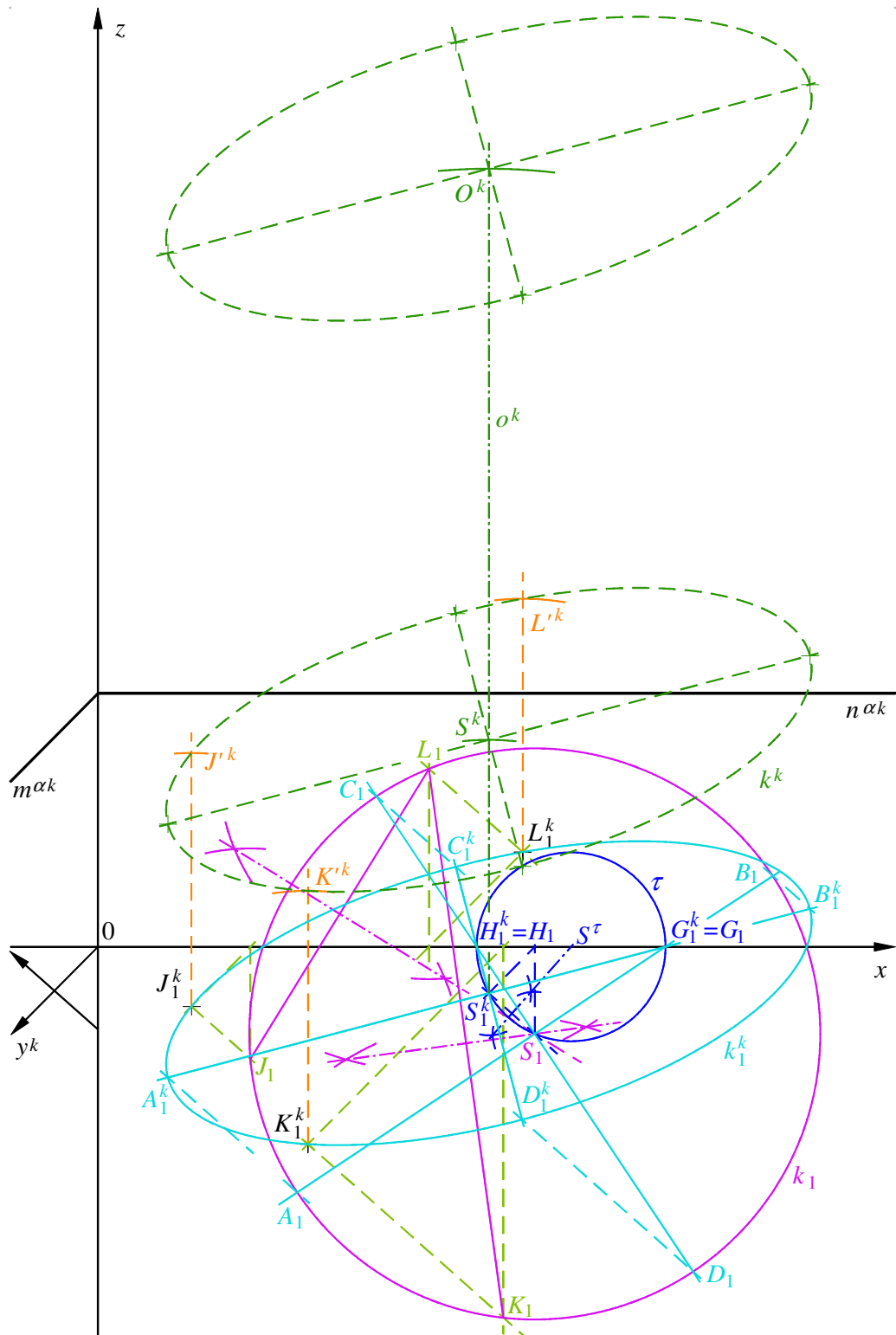
Střed S_1 půdorysu k_1 kružnice k je průsečíkem os stran trojúhelníku $J_1 K_1 L_1$. Na obrázku jsou sestrojeny osy stran $K_1 L_1$ a $L_1 J_1$. Dále zkonstruuujeme půdorys k_1 kružnice k procházející body J_1 , K_1 , L_1 .



Zkonstruuujeme kosoúhlý půdorys S_1^k středu S kružnice k . Kosoúhlý půdorys S_1^k a půdorys S_1 bodu S si odpovídají v osové afinitě v rovině s osou x . V této afinitě si odpovídají i kružnice k_1 a kosoúhlý půdorys k_1^k kružnice k , kterým je elipsa o středu S_1^k procházející body J_1^k, K_1^k, L_1^k . Směry jejích os nalezneme pomocí Thalétovy kružnice τ , jejímž středem je průsečík S^τ osy x afinity s osou úsečky $S_1S_1^k$ a která prochází bodem S_1 , resp. S_1^k . Průsečíky $G_1 = G_1^k, H_1 = H_1^k$ osy x afinity s Thalétovou kružnicí τ jsou samodružnými body, kterými procházejí osy hledané elipsy.

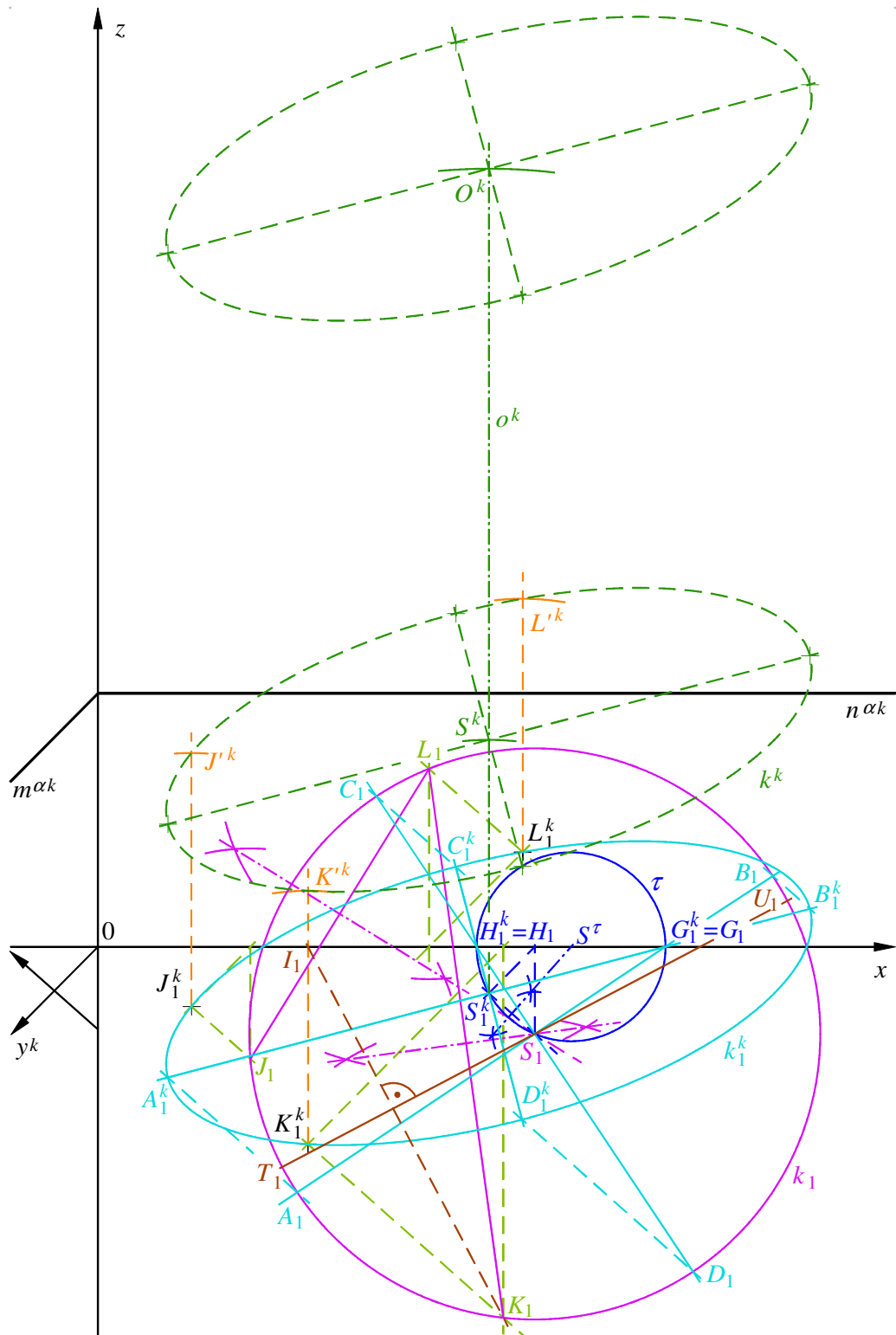


Nyní sestrojíme osy elipsy k_1^k , kterými jsou přímky $S_1^k G_1^k$ a $S_1^k H_1^k$. Hlavním, resp. vedlejším vrcholům A_1^k, B_1^k , resp. C_1^k, D_1^k elipsy k_1^k odpovídají v uvažované afinitě průsečíky A_1, B_1, C_1, D_1 přímek $S_1 G_1$ a $S_1 H_1$ s kružnicí k_1 . Sestrojíme tedy nejprve body A_1, B_1, C_1, D_1 , dále jim odpovídající vrcholy $A_1^k, B_1^k, C_1^k, D_1^k$ a následně kosoúhlý půdorys k_1^k kružnice k .

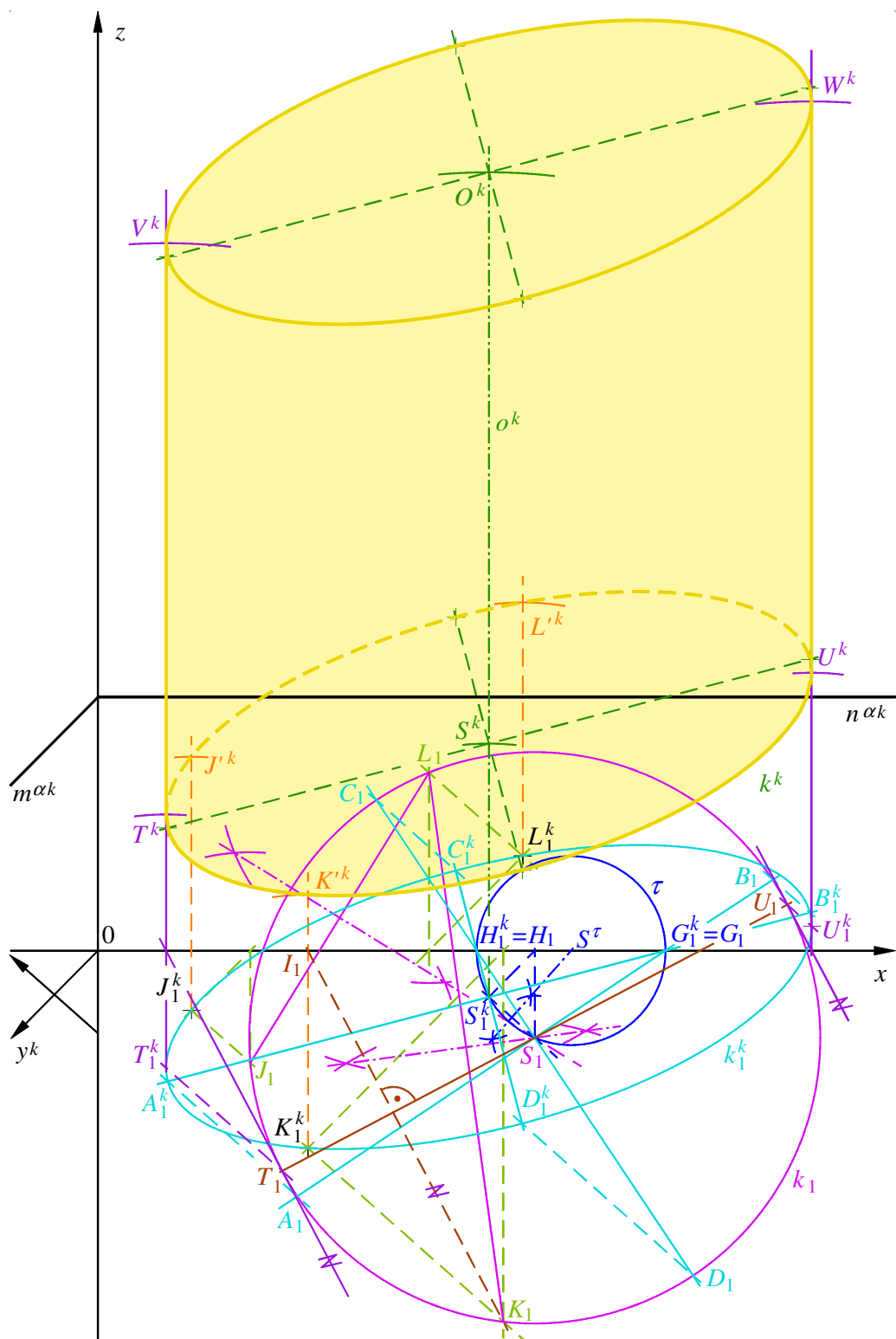


Dále sestrojíme kosoúhlý průmět k^k kružnice k , který získáme posunutím elipsy k_1^k o vzdálenost roviny α od půdorysny v kladném směru osy z souřadnicového systému.

Kosoúhlý průmět o^k osy o válce je rovnoběžný s kosoúhlým průmětem $z^k = z$ osy z . Kosoúhlý průmět O^k středu O horní podstavy rovnostranného válce leží na přímce o^k ve vzdálenosti $|A_1B_1|$ (rovné délce průměrů podstav válce) od bodu S^k , přičemž $z^S < z^O$. Kosoúhlý průmět hraniční kružnice horní podstavy válce je obrazem elipsy k^k v translaci s vektorem posunutí S^kO^k .



Dále je nutné sestavit společné tečny elips, které jsou průměty hraničních kružnic obou podstav válce, rovnoběžné s přímkou $z = z^k$. To lze provést například nalezením ohnisek jedné z elips a následně využitím jejich ohniskových vlastností (vrcholová kružnice, řídicí kružnice). Můžeme však opět využít afinitu s osou x mezi kružnicí k_1 a elipsou k_1^k . Hledané tečny jsou tečnami i elipsy k_1^k , proto stačí nalézt směr přímek, které v afinitě odpovídají směru přímky $z = z^k$, a následně sestavit tečny tohoto směru kružnice k_1 . Přímkou směru z je například přímka $K_1^k K'^k$, které odpovídá přímka $I_1 K_1$, kde $I_1 = I_1^k$ je samodružný bod přímky $K_1^k K'^k$. Body dotyku T_1, U_1 tečen kružnice k_1 , které jsou rovnoběžné s přímkou $I_1 K_1$, jsou průsečíky kružnice k_1 a jejího průměru kolmého na přímku $I_1 K_1$.



Na závěr zvýrazníme elipsy a úsečky, které určují kosoúhlý průmět válce, a to s přihlédnutím k viditelnosti jejich částí.