VEKTOROVÉ PROSTORY A PODPROSTORY

Příklad 1. Rozhodněte, zda množina $T^{m\times n}$ všech matic typu $m \times n$ nad polem T spolu se sčítáním matic a násobením matic skalárem je vektorový prostor nad polem T.

Příklad 2. Rozhodněte, zda množina T^n všech n-tic prvků pole T spolu se sčítáním n-tic a násobením n-tic skalárem je vektorový prostor nad polem T.

Příklad 3. Rozhodněte, zda pole T je spolu se sčítáním prvků a násobením prvků „převzatých“ z pole T vektorovým prostorem samo nad sebou.

Příklad 4. Rozhodněte, zda množina všech vázaných vektorů

a) v rovině,

b) v prostoru

s počátkem v pevně zvoleném bodě spolu se sčítáním vektorů a násobením vektorů reálným číslem je reálný vektorový prostor.

Příklad 5. Rozhodněte, zda množina všech vázaných vektorů v rovině, jejichž počátek je v pevně zvoleném bodě a jejichž koncový bod leží

a) v 1. kvadrantu,

b) v 1. nebo ve 2. kvadrantu,

c) v 1. nebo ve 3. kvadrantu

spolu se sčítáním vektorů a násobením vektorů reálným číslem je vektorový prostor nad polem $\mathbb{R}$.

Příklad 6. Rozhodněte, zda množina všech reálných čísel z intervalu $(0, \infty)$ s operacemi $\oplus$, $\odot$, kde $\alpha \oplus \beta = \alpha \cdot \beta$, $a \odot \alpha = \alpha^a$ je vektorový prostor nad polem $\mathbb{R}$.

Příklad 7. Rozhodněte, zda množina

$$W = \{(a+b,\ a-3b,\ 2a+4b)\,, a, b \in \mathbb{R}\}$$

je podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ nad polem $\mathbb{R}$.

Příklad 8. Rozhodněte, zda množina všech skalárních matic řádu n je podprostorem reálného prostoru $\mathbb{R}^{n\times n}$ (množina všech reálných matic řádu n spolu se sčítáním matic a násobením matic reálným číslem).

Příklad 9. Rozhodněte, zda množina všech hermitovských matic řádu n je podprostorem

a) reálného vektorového prostoru $\mathbb{C}^{n\times n}$ (množina všech komplexních matic řádu n spolu se sčítáním matic a násobením matic reálným číslem),

b) komplexního vektorového prostoru $\mathbb{C}^{n\times n}$ (množina všech komplexních matic řádu n spolu se sčítáním matic a násobením matic komplexním číslem).

Příklad 10. Rozhodněte, zda množina všech reálných matic řádu n tvaru

$$\begin{pmatrix} a & b & c & \ddots & \ddots & \ddots \\ d & a & b & c & \ddots & \ddots \\ \ddots & d & a & b & c & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & d & a & b \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & d & a \end{pmatrix},$$

kde $a \neq b \neq c \neq d \neq \ldots$, tvoří podprostor reálného prostoru $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Příklad 11. Rozhodněte, zda množina všech matic tvaru

$$\begin{pmatrix} -a & b \\ b & a \end{pmatrix},$$

kde a, $b \in \mathbb{R}$, tvoří podprostor reálného vektorového prostoru $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

VÝSLEDKY:

Příklad 1. ano

Příklad 2. ano

Příklad 3. ano

Příklad 4.
a) ano
b) ano

Příklad 5.
a) ne
b) ne
c) ne

Příklad 6. ano

Příklad 7. ano

Příklad 8. ano

Příklad 9.
a) ano
b) ne

Příklad 10. ne

Příklad 11. ano