

MATICE
(operace s maticemi)

Příklad 1. Necht' následující matice jsou maticemi nad polem komplexních čísel $\mathbb{C}$. Vypočítejte

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 & -5 \\ 5 & 1 & i \end{pmatrix}.$$

Příklad 2. Necht' následující matice jsou maticemi nad polem komplexních čísel $\mathbb{C}$. Vypočítejte

$$\begin{pmatrix} 8 & 20 \\ -6 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 2 \\ -3 & 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Příklad 3. Necht' následující matice jsou maticemi nad polem reálných čísel $\mathbb{R}$. Vypočítejte

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 & \sqrt{5} \\ \frac{5}{7} & 2 & 7 \\ 3 & 85 & 19 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 4. Necht' následující matice jsou maticemi nad polem $\mathbb{Z}_7$. Vypočítejte

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 6 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Příklad 5. Necht' následující matice je maticí nad polem komplexních čísel $\mathbb{C}$. Vypočítejte

$$-2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 5 & 3 & 12 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Příklad 6. Necht' následující matice je maticí nad polem komplexních čísel $\mathbb{C}$. Vypočítejte

$$i \cdot \begin{pmatrix} i & -i & 2i \\ 1+i & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 7. Necht' následující matice je maticí nad polem $\mathbb{Z}_5$. Vypočítejte

$$4 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 8. Necht' následující matice jsou maticemi nad polem komplexních čísel $\mathbb{C}$. Vypočítejte

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 9. Necht' následující matice jsou maticemi nad polem komplexních čísel $\mathbb{C}$. Vypočítejte

$$\begin{pmatrix} 11 & 21 & 32 \\ 23 & 33 & 21 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 10. Necht' následující matice jsou maticemi nad polem komplexních čísel $\mathbb{C}$. Vypočítejte

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Příklad 11. Necht' následující matice jsou maticemi nad polem $\mathbb{Z}_3$. Vypočítejte

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Příklad 12. Necht' následující matice jsou maticemi nad polem komplexních čísel $\mathbb{C}$. Vypočítejte

$$\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 6 & 9 \\ 0 & 2i & 9 \end{pmatrix}.$$

Příklad 13. Necht' A je maticí nad polem $\mathbb{Z}_5$. Vypočítejte A^3 , jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Příklad 14. Necht' J je maticí nad polem komplexních čísel $\mathbb{C}$. Vypočítejte J^{222} , jestliže

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 15. Necht' následující matice jsou maticemi nad polem komplexních čísel $\mathbb{C}$,

E je jednotková matice příslušného řádu a O je nulová příslušného řádu. Určete matici X , víte-li, že rovnice má řešení (tj. všechny operace existují).

$$2X + AB + 6E + 123O = 2AB,$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 16. Necht' následující matice jsou maticemi nad polem $\mathbb{Z}_5$. Určete matici X , víte-li, že rovnice má řešení (tj. všechny operace existují).

$$3X + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Příklad 17. Určete, zda jsou matice A a B nad polem komplexních čísel $\mathbb{C}$ záměnné neboli komutující.

$$\text{a)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 3i \\ 1 & -i \end{pmatrix},$$

$$\text{b)} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{c)} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Příklad 18. Místo hvězdiček $*$ v maticích nad polem komplexních čísel $\mathbb{C}$ dopište taková komplexní čísla, aby platila rovnost

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ * & 1 \\ -2 & * \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} * & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ -1 & 2 \\ * & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 19. Určete Hadamardův součin $A * B$, víte-li, že matice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3+i & 2-3i \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & i & 2+3i \\ 1 & -i & i \end{pmatrix}$$

jsou maticemi nad polem $\mathbb{C}$ komplexních čísel.

Příklad 20. Určete Kroneckerův součin $A \otimes B$, víte-li, že matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2i \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ -3i & i & 3 \end{pmatrix}$$

jsou maticemi nad polem $\mathbb{C}$ komplexních čísel.

Příklad 21. Určete Hadamardův součin $A * B$, víte-li, že matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

jsou maticemi nad polem $\mathbb{Z}_5$.

Příklad 22. Určete Kroneckerův součin $A \otimes B$, víte-li, že matice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 6 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \end{pmatrix}$$

jsou maticemi nad polem $\mathbb{Z}_7$.

Příklad 23. Určete matici X , víte-li, že všechny uvedené matice jsou maticemi nad polem $\mathbb{R}$, index T značí transponování, O je nulová matice příslušného typu a E je jednotková matice příslušného řádu.

a) $X = AB - BA$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) $X = AB - BA - 3C - 4O$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) $X = A^2B + CB^T + A^5$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

d) $X = (AB)^2 - A^2B^2$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

e) $X = (AB)^T - B^T A^T + A^T B^T,$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

f) $X = AB^2 - 3C^T + 3O,$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Příklad 24. Určete matici X , víte-li, že všechny uvedené matice jsou maticemi nad polem $\mathbb{Z}_5$ a O je nulová matice příslušného typu.

a) $X = 2PQ^4,$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) $X = A^2B + 3C + 2O,$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 25. Určete matici X , víte-li, že všechny uvedené matice jsou maticemi nad polem $\mathbb{Z}_7$ a E je jednotková matice příslušného řádu

a) $X = 5ECD^3,$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

b) $X = AB^2 + 5C + 5E^5$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 26. Doplňte na chybějící místa takové prvky, aby výsledná matice byla skalární. Všechny matice jsou matice nad $\mathbb{Z}_5$.

a)

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & \cdot \\ \cdot & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ \cdot & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 3 \\ 3 & 3 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 3 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & \cdot & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ \cdot & 4 & 3 & 3 \\ 2 & \cdot & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 2 & \cdot \\ \cdot & 3 & \cdot & \cdot \\ 3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

VÝSLEDKY:

Příklad 1.

$$\begin{pmatrix} 7 & -4 & -5 \\ 7 & 3 & -1+i \end{pmatrix}.$$

Příklad 2. součet neexistuje

Příklad 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 & \sqrt{5} \\ \frac{5}{7} & 2 & 7 \\ 3 & 85 & 19 \end{pmatrix}$$

Příklad 4.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Příklad 5.

$$\begin{pmatrix} -4 & -8 & -14 \\ -10 & -6 & -24 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Příklad 6.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1+i & 2i & 0 \end{pmatrix}$$

Příklad 7.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Příklad 8.

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ -9 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Příklad 9.

$$\begin{pmatrix} 0 & 32 \\ 0 & 21 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad 10.

a)

$$\begin{pmatrix} 7a & 7b \\ -4c & -4d \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 7a & -4b \\ 7c & -4d \end{pmatrix}$$

Příklad 11.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Příklad 12. součin neexistuje

Příklad 13.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Příklad 14.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Příklad 15.

$$\begin{pmatrix} -5 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Příklad 16.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Příklad 17.

a) ano, b) ne, c) ano

Příklad 18.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 19.

$$\begin{pmatrix} -4 & 3i-1 & 13 \\ 0 & -1 & i \end{pmatrix}$$

Příklad 20.

$$\begin{pmatrix} 3 & -15 & 6 & 2i & -10i & 4i \\ -9i & 3i & 9 & 6 & -2 & 6i \\ 2 & -10 & 4 & 7 & -35 & 14 \\ -6i & 2i & 6 & -21i & 7i & 21 \end{pmatrix}$$

Příklad 21.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Příklad 22.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Příklad 23.

a)

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

b)

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \\ -8 & -3 & -7 \end{pmatrix}$$

c)

X neexistuje,

d)

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e)

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix},$$

f)

$$X = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -6 \\ -3 & 1 & 11 \\ -11 & -10 & 0 \\ -8 & -14 & -3 \end{pmatrix}$$

Příklad 24.

a)

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

b)

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Příklad 25.

a)

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

b)

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 3 \\ 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Příklad 26.

a)

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$