

MATICOVÁ REPREZENTACE HOMOMORFISMŮ

Příklad 1. Určete matici homomorfismu f vzhledem ke kanonickým bázím příslušných vektorových prostorů

a) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$; $f(x, y, z) = (x + 3z, 2x - y + 5z, z, y + z)$,

b) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^6$; $f(x, y) = (y, y, y, y, y, y)$.

Příklad 2. Určete matici homomorfismu f z příkladu 1a) vzhledem k bázím M, N , kde $M = \{(1, 1, 2), (2, 0, -1), (1, 1, 0)\}$ je báze prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$ a N je kanonická báze prostoru $\mathbb{R}^4$ nad $\mathbb{R}$.

Příklad 3. Určete matici homomorfismu (endomorfismu) f vzhledem k bázím M, N , kde

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; f(x, y, z) = (x, y + 3z, 2x - z),$$

$$M = \{(0, 1, 1), (1, 2, 0), (0, 1, -1)\}, N = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 2, 2)\}.$$

Příklad 4. Určete matici endomorfismu $f : \mathbb{Z}_3^4 \rightarrow \mathbb{Z}_3^4$, vzhledem ke kanonické bázi. $f(x, y, z, w) = (x + 2w, w, 2y, 0)$.

Příklad 5. Určete matici endomorfismu $f : \mathbb{Z}_5^2 \rightarrow \mathbb{Z}_5^2$ vzhledem k bázi M . $f(x, y) = (4x + 3y, 0)$, $M = \{(4, 4), (3, 4)\}$.

Příklad 6. Určete matici přechodu A od báze M ke kanonické bázi prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$. $M = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, -1, 0)\}$.

Dále určete matici přechodu B od kanonické báze k bázi M . Poté ověřte, že matice B je inverzní k matici A (tj. $B = A^{-1}$, neboli $AB = BA = E$).

Příklad 7. Určete matici přechodu A od báze $M = \{(2, 1), (-1, 2)\}$ k bázi $N = \{(1, 1), (0, 2)\}$ vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$.

Dále určete matici přechodu B od báze N k bázi M . Ověřte, že matice B je inverzní k matici A (tj. $B = A^{-1}$, neboli $AB = BA = E$). Pomocí vypočítaných matic napište vztahy mezi souřadnicemi vektoru $v = (x, y)$ vzhledem k různým uvažovaným bázím (oběma směry).

Příklad 8. Určete matici přechodu A od báze $M = \{(4, 1, 1), (1, 4, 1), (1, 1, 4)\}$ k bázi $N = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ vektorového prostoru $\mathbb{Z}_5^3$ nad $\mathbb{Z}_5$.

Dále určete matici přechodu B od báze N k bázi M . Ověřte, že matice B je inverzní k matici A (tj. $B = A^{-1}$, neboli $AB = BA = E$). Pomocí vypočítaných matic napište vztahy mezi souřadnicemi vektoru $v = (x, y, z)$ vzhledem k různým uvažovaným bázím (oběma směry).

Příklad 9. Najděte matici homomorfismu $f_2 f_1$ vzhledem k bázím M, N , kde
 $M = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 2)\}$, $N = \{(1, 1), (1, 0)\}$,
 $f_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; f_1(x, y, z) = (x + z, x + y, y + z)$,
 $f_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2; f_2(x, y, z) = (x + y + z, 2(x + y + z))$.

VÝSLEDKY:

Příklad 1.

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad 2.

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 11 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad 3.

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ -6 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Příklad 4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Příklad 5.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad 6.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Příklad 7.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$\langle v \rangle_N^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \cdot \langle v \rangle_M^T$$

tj.

$$\begin{pmatrix} 2x - y \\ -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\langle v \rangle_M^T = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \cdot \langle v \rangle_N^T$$

tj.

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5}x + \frac{2}{5}y \\ \frac{1}{5}x + \frac{4}{5}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Příklad 8.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\langle v \rangle_N^T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \langle v \rangle_M^T$$

tj.

$$\begin{pmatrix} 2x + 2y + 4z \\ 2x + 4y + 2z \\ 4x + 2y + 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\langle v \rangle_M^T = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \langle v \rangle_N^T$$

tj.

$$\begin{pmatrix} 3x + 3y + z \\ 3x + y + 3z \\ x + 3y + 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Příklad 9.

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

© Martina Škorpilová