SOUČET (neboli SPOJENÍ) VEKTOROVÝCH PROSTORŮ,
DIREKTNÍ SOUČET,
PRŮNIK PROSTORŮ

Příklad 1. Určete dimenzi součtu (spojení) $V_1 + V_2$ a průniku $V_1 \cap V_2$ vektorových podprostorů V_1 a V_2 vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$.

a) $V_1 = [(2,\, 0,\, 4),\ (1,\, -3,\, -1)]\,,\ V_2 = [(5,\, -2,\, 1)],$

b) $V_1 = [(3,\, 2,\, 2),\ (6,\, 1,\, 1)]\,, V_2 = [(-3,\, 4,\, 1),\ (2,\, 1,\, -2),\ (-1,\, 2,\, 1)],$

c) $V_1 = [(-4,\, -3,\, 2),\ (1,\, -1,\, 1),\ (-3,\, 2,\, 4)]\,, V_2 = [(-1,\, -1,\, 1),\ (-2,\, 1,\, -1),\ (-1,\, 1,\, 2)],$

d) $V_1 = [(2,\, 1,\, -1),\ (3,\, -2,\, -1)]\,, V_2 = [(1,\, 4,\, -1),\ (-1,\, 3,\, 0)],$

e) $V_1 = \left[(6,\, 4,\, 0),\ (4,\, \frac{8}{3},\, 0),\ (2,\, \frac{4}{3},\, 0)\right]\,,\ V_2 = [(-2,\, 1,\, 0),\ (4,\, -2,\, 0)],$

f) $V_1 = [(4,\, 1,\, 2),\ (-4,\, -1,\, -2)]\,,\ V_2 = [(8,\, 2,\, 4),\ (-8,\, -2,\, -4)],$

g) $V_1 = [(-5,\, -2,\, 3)]\,,\ V_2 = [(2,\, 0,\, 0),\ (0,\, -2,\, 0),\ (0,\, 0,\, 8)].$

Příklad 2. Určete průnik $V_1 \cap V_2$ ve všech podpříkladech Příkladu 1.

Příklad 3. Vypočítejte dimenzi průniku $V_1 \cap V_2$ vektorových podprostorů V_1 a V_2 vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$. Tento průnik určete.

a) $V_1 = [(0,\, 0,\, -7),\ (0,\, 5,\, 0)]\,,\ V_2 = [(2,\, 0,\, 0)],$

b) $V_1 = [(1,\, 2,\, 1),\ (-1,\, 0,\, 1)]\,, V_2 = [(2,\, 3,\, 1),\ (0,\, 1,\, 0)],$

c) $V_1 = [(2,\, 2,\, 1),\ (16,\, 16,\, 8),\ (0,\, 1,\, 0)]\,, V_2 = [(-1,\, 3,\, 1),\ (1,\, 6,\, 2)],$

d) $V_1 = [(3,\, 2,\, 0),\ (1,\, 0,\, 1)]\,, V_2 = [(1,\, 4,\, -4),\ (1,\, 1,\, 1)].$

Příklad 4. Ve kterých podpříkladech Příkladu 1 platí
a) $\mathbb{R}^3 = V_1 + V_2$,

b) $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$?

Příklad 5. Matici A rozložte na symetrickou a antisymetrickou část, víte-li, že se jedná o matici nad polem $\mathbb{R}$.

a)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 7 & -9 & 12 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 2 & 8 & -11 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Příklad 6. Matici B rozložte na symetrickou a antisymetrickou část, víte-li, že se jedná o matici nad polem $\mathbb{Z}_5$.

a)

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

b)

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad 7. Matici C rozložte na symetrickou a antisymetrickou část, víte-li, že se jedná o matici nad polem $\mathbb{Z}_2$.

a)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

VÝSLEDKY:

Příklad 1.

a) $\dim V_1 + V_2 = 3, \quad \dim V_1 \cap V_2 = 0,$
b) $\dim V_1 + V_2 = 3, \quad \dim V_1 \cap V_2 = 2,$
c) $\dim V_1 + V_2 = 3, \quad \dim V_1 \cap V_2 = 3,$
d) $\dim V_1 + V_2 = 2, \quad \dim V_1 \cap V_2 = 2,$
e) $\dim V_1 + V_2 = 2, \quad \dim V_1 \cap V_2 = 0,$
f) $\dim V_1 + V_2 = 1, \quad \dim V_1 \cap V_2 = 1,$
g) $\dim V_1 + V_2 = 3, \quad \dim V_1 \cap V_2 = 1.$

Příklad 2.

a) $V_1 \cap V_2 = [(0,\ 0,\ 0)] = O,$
b) $V_1 \cap V_2 = V_1,$
c) $V_1 \cap V_2 = V_1 = V_2 = \mathbb{R}^3,$
d) $V_1 \cap V_2 = V_1 = V_2,$
e) $V_1 \cap V_2 = [(0,\ 0,\ 0)] = O,$
f) $V_1 \cap V_2 = V_1 = V_2,$
g) $V_1 \cap V_2 = V_1.$

Příklad 3.

a) $\dim V_1 \cap V_2 = 0, \ \ V_1 \cap V_2 = [(0,\ 0,\ 0)]$
b) $\dim V_1 \cap V_2 = 1, \ \ V_1 \cap V_2 = [(2,\ 3,\ 1)]$
c) $\dim V_1 \cap V_2 = 1, \ \ V_1 \cap V_2 = [(2,\ 3,\ 1)]$
d) $\dim V_1 \cap V_2 = 1, \ \ V_1 \cap V_2 = [(-1,\ -10,\ 14)]$

Příklad 4.

a) v případě a) b) c) g)

b) v případě a)

Příklad 5.

a)

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 4 & -9 & 8 \\ -1 & 8 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ 3 & 0 & 4 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{7}{2} & -1 \\ \frac{7}{2} & 8 & -5 \\ -1 & -5 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{3}{2} & 0 & -6 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Příklad 6.

a)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Příklad 7.

a) rozklad neexistuje

b) rozklad není jednoznačný

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \dots$$