BÁZE, SOUŘADNICE VEKTORU VZHLEDEM K BÁZI

Příklad 1. Určete, zda následující množina M vektorů vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$ tvoří bázi uvedeného prostoru.

a) $M = \{(0,\ 2,\ 9),\ (1,\ 2,\ 1)\}$,

b) $M = \{(0,\ 0,\ 1),\ (1,\ 0,\ 1),\ (1,\ 1,\ 0),\ (3,\ 2,\ 1)\}$,

c) $M = \{(1,\ 1,\ 1),\ (2,\ 2,\ 2),\ (3,\ 3,\ 3)\}$,

d) $M = \{(-3,\ 2,\ 1),\ (2,\ -1,\ -3),\ (-2,\ 2,\ -4)\}$,

e) $M = \{(0,\ 0,\ -5),\ (1,\ 0,\ 2),\ (-4,\ 2,\ 7)\}$.

Příklad 2. Určete, zda následující množina M vektorů vektorového prostoru $\mathbb{Z}_5^3$ nad $\mathbb{Z}_5$ tvoří bázi uvedeného prostoru.

a) $M = \{(1,\ 2,\ 3),\ (1,\ 4,\ 1),\ (2,\ 0,\ 0)\}$,

b) $M = \{(2,\ 2,\ 3),\ (1,\ 2,\ 4),\ (1,\ 3,\ 4)\}$,

c) $M = \{(3,\ 2,\ 3),\ (4,\ 1,\ 4),\ (1,\ 0,\ 1)\}$,

d) $M = \{(4,\ 1,\ 1),\ (0,\ 1,\ 1),\ (3,\ 2,\ 1)\}$.

Příklad 3. Určete, zda následující množina M vektorů vektorového prostoru $\mathbb{Z}_7^3$ nad $\mathbb{Z}_7$ tvoří bázi uvedeného prostoru.

a) $M = \{(5,\ 1,\ 1),\ (1,\ 5,\ 1),\ (1,\ 1,\ 5)\}$,

b) $M = \{(5,\ 2,\ 3),\ (6,\ 2,\ 4),\ (2,\ 0,\ 1)\}$,

c) $M = \{(3,\ 0,\ 1),\ (2,\ 1,\ 5),\ (5,\ 3,\ 3)\}$.

Příklad 4. Množinu M vektorů $\{(3,\ 0,\ 2),\ (2,\ 1,\ 2)\}$ přetvořte odebráním a/nebo přidáním vektorů na bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$.

Příklad 5. Množinu M vektorů $\{(0,\ 4,\ 2),\ (0,\ 3,\ 4)\}$ přetvořte odebráním a/nebo přidáním vektorů na bázi vektorového prostoru $\mathbb{Z}_5^3$ nad $\mathbb{Z}_5$.

Příklad 6. Množinu M vektorů $\{(1,\ 2,\ 10),\ (2,\ 4,\ 20),\ (-1,\ -2,\ -7),\ (0,\ 0,\ 3)\}$ vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$ přetvořte odebráním a/nebo přidáním vektorů na bázi uvedeného prostoru.

Příklad 7. Napište nějakou bázi $\mathcal{B}$

a) vektorového prostoru $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$,

b) vektorového prostoru $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{C}$.

Příklad 8. Určete dimenzi lineárního obalu $[M]$ množiny

$$M = \{(2,\,0,\,-1),\ (1,\,1,\,2),\ (-1,\,2,\,1),\ (3,\,3,\,4)\}$$

prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$. Z vektorů množiny M vyberte bázi $\mathcal{B}$ vektorového prostoru $[M]$.

Příklad 9. Určete dimenzi lineárního obalu $[M]$ množiny

$$M = \{(3,\,2,\,4),\ (2,\,2,\,1),\ (1,\,3,\,3),\ (0,\,3,\,0)\}$$

prostoru $\mathbb{Z}_5^3$ nad $\mathbb{Z}_5$. Z vektorů množiny M vyberte bázi $\mathcal{B}$ vektorového prostoru $[M]$.

Příklad 10. Jsou dány vektory $u_1,\,u_2,\,\ldots,\,u_k$ prostoru $\mathbb{R}^3$. Určete dimenzi podprostoru $W = [u_1,\,u_2,\,\ldots,\,u_k]$. Z jmenovaných vektorů vyberte bázi $\mathcal{B}$ podprostoru W a zbývající vektory vyjádřete jako lineární kombinaci vektorů báze.

a) $u_1 = (2,\,-1,\,1),\ u_2 = (-4,\,2,\,1),\ u_3 = (0,\,0,\,6),$

b) $u_1 = (1,\,0,\,2),\ u_2 = (2,\,-1,\,2),\ u_3 = (-3,\,2,\,-2),\ u_4 = (9,\,-8,\,5).$

Příklad 11. Jsou dány vektory $u_1,\,u_2,\,\ldots,\,u_k$ prostoru $\mathbb{Z}_3^4$. Určete dimenzi podprostoru $W = [u_1,\,u_2,\,\ldots,\,u_k]$. Z jmenovaných vektorů vyberte bázi $\mathcal{B}$ prostoru W a zbývající vektory vyjádřete jako lineární kombinaci vektorů báze.

a) $u_1 = (1,\,2,\,2,\,1),\ u_2 = (2,\,0,\,1,\,0),\ u_3 = (0,\,2,\,0,\,0),$

b) $u_1 = (2,\,2,\,2,\,1),\ u_2 = (1,\,0,\,0,\,1),\ u_3 = (1,\,0,\,1,\,0),\ u_4 = (2,\,0,\,1,\,1),\ u_5 = (0,\,1,\,0,\,1).$

Příklad 12. Určete souřadnice vektoru $v = (6,\,2,\,-1)$ vzhledem ke kanonické bázi prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$.

Příklad 13. Určete souřadnice vektoru $v = (6,\,2,\,-1)$ vzhledem k bázi

$$\mathcal{B} = \{(2,\,0,\,0),\ (0,\,10,\,0),\ (0,\,0,\,1)\}$$

prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$.

Příklad 14. Určete souřadnice vektoru $v = (6,\,2,\,-1)$ vzhledem k bázi

$$\mathcal{M} = \{(2,\,-1,\,1),\ (1,\,0,\,-2),\ (-2,\,4,\,5)\}$$

prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$.

VÝSLEDKY:

Příklad 1.
a) ne b) ne c) ne d) ne e) ano

Příklad 2.
a) ne b) ne c) ne d) ano

Příklad 3.
a) ne b) ano c) ne

Příklad 4. přidáme jeden vektor, a to například vektor (0, 1, 0)

Příklad 5. přidáme dva vektory, a to například vektory (1, 0, 0), (0, 1, 0)

Příklad 6. odebereme např. vektory (2, 4, 20), (−1, −2, −7), přidáme jeden vektor, a to například vektor (0, 1, 0)

Příklad 7. a) např. $\mathcal{B} = \{1, i\}$, b) např. $\mathcal{B} = \{1\}$

Příklad 8. $\dim[M] = 3$, např. $\mathcal{B} = \{(2, 0, -1), (1, 1, 2), (-1, 2, 1)\}$

Příklad 9. $\dim[M] = 2$, např. $\mathcal{B} = \{(3, 2, 4), (2, 2, 1)\}$

Příklad 10.
a) dim W=2, např. $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$, $u_3 = 4u_1 + 2u_2$
b) dim W=3, např. $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_4\}$, $u_3 = u_1 - 2u_2$

Příklad 11.
a) dim W=3, $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$
b) dim W=4, např. $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_5\}$, $u_4 = u_2 + u_3$

Příklad 12.
$\langle v \rangle_{k.\,b.} = (6, 2, -1)$

Příklad 13.
$\langle v \rangle_{\mathcal{B}} = (3, \frac{1}{5}, -1)$

Příklad 14.
$\langle v \rangle_{\mathcal{M}} = (2, 4, 1)$