2. cvičení z PSt — 26.2.–1.3.2024

1. Dokažte, že pro dva jevy A, B platí $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Podmíněná pravděpodobnost, Bayesova věta

2. Házíme dvakrát mincí. Je větší pravděpodobnost, že dvakrát padne panna, za předpokladu, že první hod byla panna NEBO že dvakrát padne panna, za předpokladu, že *některý* hod byla panna?

3. Jaký je vztah tvrzení $P(A \mid B) > P(A)$ a $P(B \mid A) > P(B)$?

4. V krabici sto mandarinek jsou čtyři zkažené. Vytáhneme postupně tři mandarinky. Označme A_i jev „i-tá mandarinka není zkažená“. (a) Spočtěte $P(A_1 \cap A_2)$. **Využijte podmíněnou pravděpodobnost.**
(b) Spočtěte $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$. Opět využijte podmíněnou pravděpodobnost. Pokud si nebudete vědět rady, koukněte na první užitečný vzorec z druhé strany.

5. Máme tři normální hrací kostky a jednu kostku, kde jsou tři jedničky a tři dvojky. Vybereme uniformně náhodně jednu z kostek, hodíme.
(a) Jaká je pravděpodobnost, že padne jednička?
(b) Pokud nám padla jednička, jaká je pravděpodobnost, že jsme vybrali normální kostku?

6. Petr dostává hodně emailů, ale 80 % z nich jsou spamy. Jeho spamový filtr 90 % spamů správně označí, ale také 5 % řádných emailů označí jako spam.
(a) Kolik procent emailů bude označeno jako spamy?
(b) Kolik procent řádných emailů je mezi těmi, co jsou označené jako spamy?
(c) Kolik procent spamů je mezi emaily, které testem prošly?

7. (Paradox Monty Halla) V soutěžní hře soutěžící (tj. my) stojíme na podiu před třemi dveřmi. Za jedněmi je auto (to chceme), za ostatními koza (tu nechceme, moc žere). Vybereme si jedny dveře, ale než je otevřeme, tak moderátor otevře jedny ze zbylých dveří, ukáže za nimi kozu, a nabídne nám, že můžeme svoji volbu změnit. Máme to udělat? Pomůže to? Uvědomte si, že zadání má (minimálně) následující dvě varianty:

(a) moderátor ví, kde je auto, a tomu přizpůsobí, které dveře otevře;

(b) moderátor si hodí korunou, které dveře otevřít. (Jiné, než ty, co jsme vybrali.) Kdyby odhalil auto, tak bychom asi nezaviněně prohráli, ale to se zrovna nestalo.

Pro snazší domluvu: vybereme dveře číslo 1, auto je za náhodnými dveřmi. Poté, co moderátor otevře dveře 2 nebo 3, tak naši volbu změníme. Spočítejte pravděpodobnost, že vyhrajeme auto, ve variantách (a), (b).

8. Alice má n mincí, Bob $n+1$. Oba hodí všemi svými mincemi a spočítají, komu padne kolikrát panna. Pravděpodobnost, že Bobovi padla vícekrát, je $1/2$. (Návod: Bob si dá jednu minci stranou a napřed spočítá těch n ostatních, teprve pak připočte tu poslední.)

9. Varianta problému s obálkami: ve dvou obálkách je v každé částka daná nějakým reálným číslem, v každé jiným. Máme dovoleno jednu obálku otevřít a pak se rozhodnout, zda si necháme tu, nebo tu druhou. Jak můžeme s pravděpodobností $> 1/2$ získat obálku s vyšším obnosem?

[Návod: nebude to o moc víc než $1/2$, navíc ta pravděpodobnost závisí na tom, jak se dané dvě částky liší. Použijte nějakou rostoucí funkci $F : \mathbb{R} \to (0, 1)$, pokud vyberete obálku s částkou x, změňte obálku s pravděpodobností $F(x)$.]

Bonusy

10. (Simpsonův paradox) V této úloze budeme mít bonbony dvou druhů: dobré červené a nedobré zelené. Bonbony ale vybíráme z nádoby poslepu (nebo jsme barvoslepí). Rozhodněte, zda se může stát následující podivnost:

- Při vytahování bonbonu z bílé krabice máme vyšší pravděpodobnost, že vytáhneme dobrý bonbon, než z černé krabice.
- Při vytahování bonbonu z bílého sáčku máme vyšší pravděpodobnost, že vytáhneme dobrý bonbon, než z černého sáčku.
- Pokud přesypeme bonbony z bílého sáčku do bílé krabice (a z černého do černé krabice), tak budeme mít lepší pravděpodobnost vytažení dobrého bonbonu v černé krabici.

11. (Prosecutor's fallacy) Paní C umřely dvě děti krátce po narození. Je obžalovaná za dvojnásobnou vraždu. Žalobce argumentuje takto: Pravděpodobnost syndromu náhlého úmrtí kojenců je $1/8500$. Takže pravděpodobnost dvou takových jevů je $1/8500^2$. Tudíž pravděpodobnost, že paní C je nevinná je $1/8500^2$, což je hodně málo.

Formulujte argumenty žalobce v řeči pravděpodobnosti a nalezněte v nich dvě chyby.

K procvičení

12. Máme k nádob, v každé z nich a bílých a b černých míčků. Z první vybereme náhodný míček, vhodíme do druhé. Pak z ní vybereme náhodný míček, vhodíme do třetí, atd. Jaká je pravděpodobnost, že z poslední nádoby vytáhneme bílý míček?

13. V urně je a černých a b bílých míčků. Postupně z ní (bez vracení) taháme míčky. Jaká je pravděpodobnost, že první vytažený míček je černý? Druhý, třetí, …?

14. V krabici je m bílých a n černých míčků. Dva hráči střídavě tahají míčky, první kdo vytáhne bílý míček prohrál. Jaká je pravděpodobnost $p(m, n)$, že prohraje první hráč? (Sestavte rekurentní formuli, tj. formuli pro $p(m, n)$ pomocí $p(m', n')$ pro $m' \leq m$, $n' \leq n$.)

15. Logická formule $A \Rightarrow B$ je ekvivalentní obměně $\neg B \Rightarrow \neg A$. Budeme se zabývat analogiemi zahrnujícími pravděpodobnost.

(a) Ukažte, že pokud $P(B \mid A) = 1$, tak také $P(A^c \mid B^c) = 1$.

(b) Ukažte, že je však možné, aby $P(B \mid A) \doteq 1$, ale $P(A^c \mid B^c) \doteq 0$.

Užitečné vzorce

- Pokud $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ a $P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) > 0$, tak
$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n \mid \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)$$
- Pokud $B_1, B_2, \ldots$ je rozklad Ω a $A \in \mathcal{F}$, tak
$$P(A) = \sum_i P(A \mid B_i)P(B_i)$$
(sčítance s $P(B_i) = 0$ považujeme za 0).
- Za předpokladů minulé části,
$$P(B_j \mid A) = \frac{P(B_j)P(A \mid B_j)}{\sum_i P(B_i)P(A \mid B_i)}$$