

Domácí úlohy 3.

do 6.6. 13:10

Úkoly odevzdávejte na prosemináři nebo je pošlete na email `alexander.slavik@matfyz.cuni.cz` v jednom souboru ve formátu `Prijmeni_cislosady.PDF` (čitelný sken v jednom souboru, na bílém pozadí bez tmavých okrajů). Uveďte také svoji přezdívku, pod kterou řešíte kahooty a pod kterou uvidíte výsledky na webu.

1. (5 bodů) Načrtněte eliptickou křivku $y^2 = x^3 + 4x$ v projektivní rovině $\mathcal{P}^2(\mathbb{R})$. Tato křivka obsahuje přesně tři afinní body s racionálními souřadnicemi. Dokažte, že grupa $E_{\mathbb{Q}}(f)$ je čtyřprvková cyklická. *Rada:* diskutujte řády prvků

2. (5 bodů) Vysvětlete nějaké geograficky vzdálené osobě (humanitně založené sestře, spolužákovi, který nemá rád algebru, rodičům, zvidavému dědečkovi, ...), jak hrát kámen-nůžky-papír přes chat, a zahrajte si. Jako důkaz pošlete printscreen komunikace :-) (aspoň fragment, z kterého je vidět, jak hrajete). Jako jednosměrnou funkci použijte třeba diskrétní exponenciálu v $\mathbb{Z}_p^*$.

3. (5 bodů) Dokažte, že kvaternionová grupa Q_8 má prezentaci

$$Q_8 \simeq \langle a, b \mid aba = b, bab = a \rangle.$$

4. (5 bodů) Napište fundamentální grupu (a) objektu, který sestává z hran krychle, (b) objektu, který sestává ze stěn krychle, (c) krychle.

5. (5 bodů) Vezměte kruh a slepte středově symetrické body na hranici (tj. pokud vezmeme kruh o poloměru 1 se středem v $(0, 0)$, slepíme právě body (a, b) a $(-a, -b)$, kde $a^2 + b^2 = 1$). (*Nesnažte se lepit kus papíru, to je marné. Kreslete placaté obrázky jako pro torus a Kleinovu lahev.*) Výsledný prostor má fundamentální grupu izomorfní $\mathbb{Z}_2$. Konkrétně, zvolme báze bod e na hranici kruhu. Napište mi, které cesty budou ekvivalentní triviální cestě a které ne, zdůvodněte proč součin dvou netriviálních cest lze zkontrahovat do bodu (stačí neformálně, rozkreslete animaci). *Návod:* průměr kruhu je cesta.

Taky si můžete rozmyslet, že právě popsany prostor je totéž jako reálná projektivní rovina, čili $\pi_1(P^2\mathbb{R}) = \mathbb{Z}_2$.